
ゴウカライズ
解答速報
2024.2.25
東京工業
大学
数学

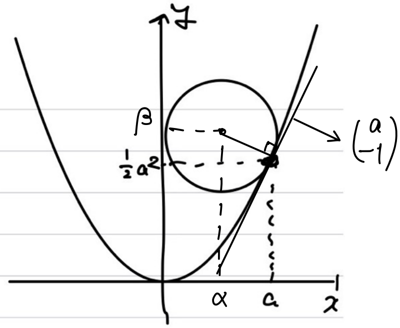
I

xy 平面上の曲線 $y=\frac{1}{2}x^2$ に, 点 $\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ $(a>0)$ で接する円のうち, y 軸の正の部分にも接するものを S_a とおく. a が正の実数を動くときの S_a の中心の軌跡を C, とくに S_1 の中心を P とする.

(1) 点 P の座標を求めよ.

(2) 点 P における曲線 C の接線の傾きを求めよ.

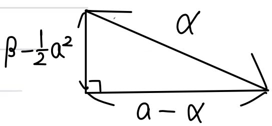
東工

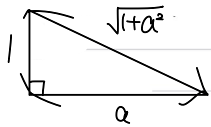


$\boxed{\text{I}}$ 円の中心を(α,β)とする。$(\alpha,\beta>0)$

y軸に接するので 半径αとなり,

(1) $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\alpha^2$ が円の方程式である.





以上2つの三角形は相似なので, $(a-\alpha)\sqrt{1+a^2}=a\alpha$

$$a\sqrt{1+a^2}=(a+\sqrt{1+a^2})\alpha$$

$$\alpha=a(1+a^2)-a^2\sqrt{1+a^2}$$

また, $\left(\beta-\frac{1}{2}a^2\right)a=a-\alpha$ より, $\beta=1-(1+a^2)+a\sqrt{1+a^2}+\frac{1}{2}a^2$

$$=a\sqrt{1+a^2}-\frac{1}{2}a^2$$

特に, Pについては$a=1$のときで, $\underline{P\left(2-\sqrt{2},\ \sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)}$ //

(2) $\dfrac{d\beta}{d\alpha}=\dfrac{\left(\frac{d\beta}{da}\right)}{\left(\frac{d\alpha}{da}\right)}$ であって,

$\dfrac{d\beta}{da}=\sqrt{1+a^2}+a\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}-a$ より, $\left.\dfrac{d\beta}{da}\right|_{a=1}=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{2}$

$\dfrac{d\alpha}{da}=(1+a^2)+2a^2-2a\sqrt{1+a^2}-a^2\cdot\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ より, $\left.\dfrac{d\alpha}{da}\right|_{a=1}=\dfrac{8-5\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \left.\dfrac{d\beta}{d\alpha}\right|_{a=1}=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{8-5\sqrt{2}}=\underline{1+\sqrt{2}}$ //

II

実数全体を定義域にもつ微分可能な関数 $f(t)$, $g(t)$ が次の 6 つの条件を満たしているとする.

$$f'(t) = -f(t)g(t),\ g'(t) = \{f(t)\}^2,$$

$$f(t) > 0,\ |g(t)| < 1,\ f(0) = 1,\ g(0) = 0$$

このとき

$$p(t) = \{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2,\ q(t) = \log\frac{1+g(t)}{1-g(t)}$$

とおく.

(1) $p'(t)$ を求めよ.

(2) $q'(t)$ は定数関数であることを示せ.

(3) $\lim_{t\to\infty} g(t)$ を求めよ.

(4) $f(T) = g(T)$ となる正の実数 T に対して, 媒介変数表示された平面曲線 $(x,\ y) = (f(t),\ g(t))$ $(0 \leqq t \leqq T)$ の長さを求めよ.

$\boxed{2}$

(1) $p'(t) = 2f(t)\cdot f'(t) + 2g(t)\cdot g'(t)$

$= 2f(t)\cdot(-f(t)g(t)) + 2g(t)\cdot(f(t))^2$

$= 0$. なお, $p(0)=1$ なので, $p(t)$ は常に 1 である.

(2)

$$q'(t) = \frac{\dfrac{g'(t)(1-g(t)) + g'(t)(1+g(t))}{(1-g(t))^2}}{\dfrac{1+g(t)}{1-g(t)}}$$

$$= \frac{2g'(t)}{1-(g(t))^2}$$

$$= \frac{2\{1-(g(t))^2\}}{1-(g(t))^2} \quad (\because g'(t) = (f(t))^2 \text{ かつ } p(t) = 1)$$

$$= 2$$

$\therefore$ $q'(t)$ は定数関数である ■

(3). $\varphi(0)=0$ であるから、(2)より、$\varphi(t)$ はある実数 k を用いて $\varphi(t)=kt$ とおける。

なお、$\varphi'(0)=2$ より、$k=2$ である。
つまり、$\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$ である。

$$\therefore \lim_{t\to\infty} g(t)=1.$$

(4).
$$\int_0^T \sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$$

います。

$$2t = \log\frac{1+g(t)}{1-g(t)} \text{ より、} \quad g(t)=\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}.$$

また、

$$2 = \frac{2g'(t)}{1-(g(t))^2} \text{ より、} \quad g'(t)=\frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}.$$

$$\therefore f(t)=\sqrt{g'(t)}=\frac{2e^t}{e^{2t}+1} \quad (\because f(t)>0).$$

また、$f(T)=g(T)$ なら $f(T)=g(T)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ なので、
$T=\log(1+\sqrt{2})$.

$$\therefore \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{2e^t}{e^{2t}+1}\,dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} 2\,d\theta \qquad \langle e^t=\tan\theta\rangle$$

なお、$\tan\frac{3}{8}\pi=1+\sqrt{2}$ を用いた。

よって、求める値は $\frac{\pi}{4}$

大問 3

xy 平面上に点 $A(a,0)$, $B(0,b)$, $C(-a,0)$ (ただし $0<a<b$) をとる．点 A, B を通る直線を ℓ とし，点 C を通り線分 BC に垂直な直線を k とする．さらに，点 A を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_1 とし，点 C_1 を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_1 とする．以下，$n=1,2,3\ldots$ に対して，点 A_n を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_{n+1}, 点 C_{n+1} を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_{n+1} とする．

(1) 点 A_n, C_n の座標を求めよ．

直線 k, ℓ の方程式はそれぞれ $y=-\frac{a}{b}x-\frac{a^2}{b}$, $x=-\frac{a}{b}y+a$ である．これより，$A_n(x_n,y_n)$ であるとき，$C_{n+1}(x_n,-\frac{a}{b}x_n-\frac{a^2}{b})$, $A_{n+1}(\frac{a^2}{b^2}x_n+\frac{a^3}{b^2}+a,-\frac{a}{b}x_n-\frac{a^2}{b})$ となることから漸化式

$$x_{n+1}=\frac{a^2}{b^2}x_n+\frac{a^3}{b^2}+a$$

が立てられる．$C_1(a,-\frac{2a^2}{b})$, $A_1(\frac{2a^3}{b^2}+a,\frac{2a^2}{b})$ より $x_1=\frac{2a^3}{b^2}+a$ である．これと漸化式から，

$$x_n=-\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^n\frac{2a^3}{b^2-a^2}+\frac{a^3+ab^2}{b^2-a^2}$$

と求まる．A_n は ℓ 上にあるので

$$y_n=b-\frac{b}{a}x_n=\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^n\frac{2a^2b}{b^2-a^2}-\frac{2a^2b}{b^2-a^2}$$

である．

したがって，$A_n\left(-\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^n\frac{2a^3}{b^2-a^2}+\frac{a^3+ab^2}{b^2-a^2},\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^n\frac{2a^2b}{b^2-a^2}-\frac{2a^2b}{b^2-a^2}\right)$ である．

(2) $\triangle CBA_n$ の面積 S_n を求めよ．

$\dfrac{BA_n}{BA}=\dfrac{x_n}{a}$ であることを用いる．$\triangle CBA$ の面積を S とおくと $S=ab$ であり，

$$S_n=\frac{BA_n}{BA}S=bx_n=b\left(-\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^n\frac{2a^3}{b^2-a^2}+\frac{a^3+ab^2}{b^2-a^2}\right)$$

である．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{BA_n}{BC}$ を求めよ．

$\dfrac{BA_n}{BC}=\dfrac{BA_n}{BA}=\dfrac{x_n}{a}$ である．$a<b$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^n=0$ であることを用いると，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{BA_n}{BC}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a}\left(-\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^n\frac{2a^3}{b^2-a^2}+\frac{a^3+ab^2}{b^2-a^2}\right)\\&=\frac{1}{a}\frac{a^3+ab^2}{b^2-a^2}\\&=\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}\end{aligned}$$

と計算できる．

4 (60点)

n を正の整数とし，$C_1, \ldots, C_n$ を n 枚の硬貨とする．各 $k = 1, \ldots, n$ に対し，硬貨 C_k を投げて表が出る確率を p_k，裏が出る確率を $1 - p_k$ とする．この n 枚の硬貨を同時に投げ，表が出た硬貨の枚数が奇数であれば成功，というゲームを考える．

(1) $p_k = \dfrac{1}{3}$ $(k = 1, \ldots, n)$ のとき，このゲームで成功する確率 X_n を求めよ．

(2) $p_k = \dfrac{1}{2(k+1)}$ $(k = 1, \ldots, n)$ のとき，このゲームで成功する確率 Y_n を求めよ．

(3) $n = 3m$ (m は正の整数) で，$k = 1, \ldots, 3m$ に対して

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{3m} & (k = 1, \ldots, m) \\ \dfrac{2}{3m} & (k = m+1, \ldots, 2m) \\ \dfrac{1}{m} & (k = 2m+1, \ldots, 3m) \end{cases}$$

とする．このゲームで成功する確率を Z_{3m} とするとき，$\displaystyle\lim_{m \to \infty} Z_{3m}$ を求めよ．

(1) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)^n$ の x^kの係数が k回表が出る確率となるので，

求める確率 $X_n = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\cdot(-1) + \frac{2}{3}\right)^n\right\} = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

(2) $\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{6}x + \frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{8}x + \frac{7}{8}\right)\cdots\left(\frac{1}{2(n+1)}x + \frac{2n+1}{2(n+1)}\right)$ ($= f(x)$とおく)の x^kの係数が

k回表が出る確率となるので，

求める確率 $Y_n = \frac{1}{2}\{f(1) - f(-1)\} = \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}\right)\right.$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{2(n+1)}$

(3) $\left(\frac{1}{3m}x + \frac{3m-1}{3m}\right)^m\left(\frac{2}{3m}x + \frac{3m-2}{3m}\right)^m\left(\frac{1}{m}x + \frac{m-1}{m}\right)^m$ ($= g(x)$とおく)

の x^kの係数が k回表が出る確率となるので，

$Z_{3m} = \frac{1}{2}\left(g(1) - g(-1)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{3m-2}{3m}\right)^m\left(\frac{3m-4}{3m}\right)^m\left(\frac{m-2}{m}\right)^m\right)$

$\displaystyle\lim_{m\to\infty} Z_{3m} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\left(1 - \left(\left(1-\frac{2}{3m}\right)^{-\frac{3}{2}m}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\left(1-\frac{4}{3m}\right)^{-\frac{3}{4}m}\right)^{-\frac{4}{3}}\left(\left(1-\frac{2}{m}\right)^{-\frac{m}{2}}\right)^{-2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e^4}\right)$

5 (60点)

整数の組(a, b)に対して2次式$f(x) = x^2 + ax + b$を考える．方程式$f(x) = 0$の複素数の範囲のすべての解αに対して$\alpha^n = 1$となる正の整数nが存在するような組(a, b)をすべて求めよ．

東工大

$\boxed{5}$ 条件は「$f(x)=0$のすべての解が $x = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ とかける」と言い換えられる

(i) $f(x)=0$の解が実数のとき．

前述の条件を満たす$f(x)$は，

$f(x) = (x-1)^2,\ (x+1)^2,\ (x-1)(x+1)$ に限られるので．それぞれ展開して

$(a, b) = (-2, 1)(2, 1)(0, -1)$

(ii) $f(x)=0$の解が虚数であるとき

このとき $f(x)=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{4b-a^2}\,i)$

$$条件 \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{a}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{n} \\ \pm\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2} = \sin\dfrac{2\pi}{n} \end{cases}$$

$$\cos^2\frac{2\pi}{n} + \sin^2\frac{2\pi}{n} = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + \frac{4b-a^2}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow b = 1$$

仮定より $a^2 - 4b < 0 \Leftrightarrow a^2 < 4$

$\Leftrightarrow a = 0, \pm 1$

以上(i)(ii)より求める組は

$(a, b) = (0, \pm 1)(\pm 1, 1)(\pm 2, 1)$ …(答)