
ゴウカライズ
解答速報
2024.2.26
東北大学
文系
数学

I

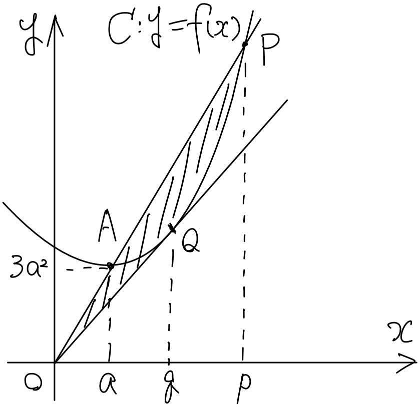
a を正の実数とし, $f(x)=x^2-2ax+4a^2$ とする. O を原点とする xy 平面上の放物線 $C\ :\ y=f(x)$ の頂点を A とする. 直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ とし, O から C へ引いた接線の接点を $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする. ただし, $q>0$ とする.

(1) $p,\ q$ の値を a を用いて表せ. また, $p>q$ であることを示せ.

(2) 放物線 C の $q \leqq x \leqq p$ の部分, 線分 OP , および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく. S を a を用いて表せ.

(3) (2) の S に対し, $S=\dfrac{2}{3}$ となるときの a の値を求めよ.

(1)



$f(x)=(x-a)^2+3a^2$ より $A(a, 3a^2)$

これより直線OAの方程式は

$y=3ax$ であり, これと C の交点について, $x^2-2ax+4a^2=3ax \Leftrightarrow x=a, 4a$

このうち $x \neq a$ を満たす x が p であるので, $a>0$ より $\underline{p=4a}$ //

また, $f'(x)=2x-2a$ であるので, $y=f(x)$ の $x=t$ における接線の方程式は $y=(2t-2a)(x-t)+(t^2-2at+4a^2)=(2t-2a)x+(-t^2+4a^2)$

これが, $(0,0)$ を通るとき, $t=\pm 2a$ で, このうち $t>0$ となるものが q であるので, $a>0$ より $\underline{q=2a}$ //

(2) $S=\dfrac{1}{2}\cdot p\cdot f(p)-\dfrac{1}{2}q\cdot f(q)-\displaystyle\int_q^p f(x)\,dx$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 4a\cdot 12a^2-\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot 4a^2-\left[\dfrac{1}{3}x^3-ax^2+4a^2x\right]_{2a}^{4a}$

$=\underline{\dfrac{16}{3}a^3}$ //

(3) $S=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow a^3=\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$ ($\because a$ は正の実数)

$\underline{\therefore a=\dfrac{1}{2}}$ //

II

$a,\ b,\ d$ を正の実数とし，xy 平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(b,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ d)$ が次の条件をすべて満たすとする．

$$\angle\mathrm{OAD}=15^\circ,\quad \angle\mathrm{OBD}=75^\circ,\ \mathrm{AB}=6$$

以下の問いに答えよ．

(1) $\tan 75^\circ$ の値を求めよ．

(2) $a,\ b,\ d$ の値をそれぞれ求めよ．

(3) 2 点 O, D, を直径の両端とする円を C とする．線分 AD と C の交点のうち D と異なるものを P とする．また，線分 BD と C の交点のうち D と異なるものを Q とする．このとき，方べきの定理

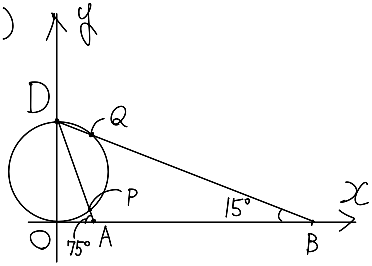
$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AD}=\mathrm{AO}^2,\quad \mathrm{BQ}\cdot\mathrm{BD}=\mathrm{BO}^2$$

を示せ．

(4) (3) の点 P, Q に対し，積 $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BQ}$ の値を求めよ．

(1) $\tan 75^\circ=\tan(30^\circ+45^\circ)=\dfrac{\tan 30^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 30^\circ\tan 45^\circ}=\underline{2+\sqrt{3}}$ //

(2)



$\tan 15^\circ=\tan(90^\circ-75^\circ)=\dfrac{1}{\tan 75^\circ}=2-\sqrt{3}$ である．

$a=\dfrac{d}{\tan 75^\circ},\ b=\dfrac{d}{\tan 15^\circ}$ から

$\mathrm{AB}=d\left(\dfrac{1}{\tan 15^\circ}-\dfrac{1}{\tan 75^\circ}\right)=2\sqrt{3}d=6$ より $\underline{d=\sqrt{3}}$ //

これより $a=(2-\sqrt{3})d=\underline{2\sqrt{3}-3}$ // $b=(2+\sqrt{3})d=\underline{2\sqrt{3}+3}$ //

(3) まず $\triangle\mathrm{AOP}$ と $\triangle\mathrm{ADO}$ の相似を示す．$\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{DAO}$（共通），

$\angle\mathrm{OPA}=90^\circ=\angle\mathrm{DOA}$ より二角相等．$\therefore \triangle\mathrm{AOP}\sim\triangle\mathrm{ADO}$

これより $\mathrm{AO}:\mathrm{AP}=\mathrm{AD}:\mathrm{AO}\quad \therefore \mathrm{AP}\cdot\mathrm{AD}=\mathrm{AO}^2$ ▨

次に $\triangle\mathrm{BOQ}$ と $\triangle\mathrm{BDO}$ の相似を示す．$\angle\mathrm{OBQ}=\angle\mathrm{DBO}$（共通），

$\angle\mathrm{OQB}=90^\circ=\angle\mathrm{DOB}$ より二角相等．$\therefore \triangle\mathrm{BOQ}\sim\triangle\mathrm{BDO}$

これより $\mathrm{BO}:\mathrm{BQ}=\mathrm{BD}:\mathrm{BO}\quad \therefore \mathrm{BQ}\cdot\mathrm{BD}=\mathrm{BO}^2$ ▨

(4) 以上の結果より，

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BQ}=\frac{\mathrm{AO}^2\cdot\mathrm{BO}^2}{\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BD}}=\mathrm{AO}\cdot\mathrm{BO}\cdot\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{BD}}=3\cdot\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\sin 30^\circ$$

$$=\underline{\frac{3}{4}}$$ //

第３問

以下の問いに答えよ。

(1) t を $t>1$ を満たす実数とする。正の実数 x が 2 つの条件

(a) $x > \dfrac{1}{\sqrt{t}-1}$

(b) $x \geqq 2\log_t x$

をともに満たすとする。このとき，不等式 $x+1 > 2\log_t(x+1)$ を示せ。

解答.

$$1 > 2\log_t(x+1) - 2\log_t x = 2\log_t\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

を示せば十分である. $t>1$ より

$$\begin{aligned} & 1 > 2\log_t\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ \iff \quad & \sqrt{t} > 1 + \frac{1}{x} \\ \iff \quad & \frac{1}{\sqrt{t}-1} < x \end{aligned}$$

であるため示された.

(2) $n \leqq 2\log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ。

解答. $n=1$ のとき, $1 > 2\log_2 1 = 0$ であり条件をみたさない.

$n=2$ のとき, $2 = 2\log_2 2$ であり条件をみたす.

$n=3$ のとき, $3=\log_2 8$, $2\log_2 3 = \log_2 9$ なので条件をみたす.

$n=4$ のとき, $4 = \log_2 4$ であり条件をみたす.

$n \geqq 5$ のとき $n > 2\log_2 n$ であることを帰納法で示す.

$4 > \sqrt{2}+1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ であることを用いる. ここで, $4 \geqq 2\log_2 4$ であるため, (1) の結果から $5 > 2\log_2 5$ である.

$n \geqq 5$ に対して $n > 2\log_2 n$ が成り立つならば, $n > 4 > \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ と (1) より $n+1 > 2\log_2(n+1)$ が成り立つ.

したがって, 任意の $n \geqq 5$ で $n > 2\log_2(n+1)$ が成り立つ.

以上より, 求める n は $n = 2, 3, 4$ である.

IV

n を正の整数とする. 2 つの整数 a_n, b_n を条件

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

により定める. ここで, $\sqrt{2}$ は無理数なので, このような整数の組 $(a_n,\ b_n)$ はただ 1 つに定める.

(1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いてそれぞれ表せ. さらに, b_4, b_5, b_6 の値をそれぞれ求めよ.

(2) 等式

$$(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ.

(3) $n \geqq 2$ のとき, $b_{n+1}b_{n-1} - b_n^2$ を求めよ.

(4) $pb_6 - qb_5 = 1$, $0 \leqq p \leqq 100$, $0 \leqq q \leqq 100$ をすべて満たす整数 p, q の組 $(p,\ q)$ を 1 組求めよ.

(1) $a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^{n+1} = (1+\sqrt{2})^n \cdot (1+\sqrt{2}) = (a_n + b_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$

$= (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{2}$

であり, a_n, b_n は整数であることから, $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$ //

また, $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $a_2 = 3$, $b_2 = 2$, $a_3 = 7$, $b_3 = 5$,
$a_4 = 17$, $b_4 = 12$, $a_5 = 41$, $b_5 = 29$, $a_6 = 99$, $b_6 = 70$, … となるので,
$b_4 = 12$, $b_5 = 29$, $b_6 = 70$ //

(2) (1)で定まった $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に対して, $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ となることを数学的帰納法を用いて証明する.

(i) $n=1$ のとき $(1-\sqrt{2})^1 = a_1 - b_1\sqrt{2}$ より成立.

(ii) $n = k$ $(k \in \mathbb{N})$ のとき $(1-\sqrt{2})^k = a_k - b_k\sqrt{2}$ であると仮定すると,

$(1-\sqrt{2})^{k+1} = (1-\sqrt{2})^k \cdot (1-\sqrt{2}) = (a_k - b_k\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = (a_k + 2b_k) - (a_k + b_k)\sqrt{2}$

$= a_{k+1} - b_{k+1}\sqrt{2}$ と

なるので, $n = k+1$ においても成立する.

∴ (i), (ii) よりすべての自然数 n に対して, $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ が成立する ▨

(3) $\begin{cases} a_n + b_n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^n \\ a_n - b_n\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^n \end{cases}$ より，$b_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left\{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right\}$ である.

これより，
$$
\begin{aligned}
b_{n+1}\cdot b_{n-1} - b_n^2 &= \frac{1}{8}\left\{\left((1+\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1}\right)\left((1+\sqrt{2})^{n-1}-(1-\sqrt{2})^{n-1}\right)-\left((1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\right)^2\right\} \\
&= \frac{1}{8}\left\{-(1+\sqrt{2})^{n-1}(1-\sqrt{2})^{n-1}\left((1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2\right)+2(1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n\right\} \\
&= \frac{1}{8}\left\{(-1)^n\cdot 6+(-1)^n\cdot 2\right\} \\
&= \underline{(-1)^n} \,//
\end{aligned}
$$

(4) $pb_6 - qb_5 = 70p - 29q = 1$ — ① の解について，

(3)より $b_6\cdot b_4 - b_5^2 = 70\cdot 12 - 29\cdot 29 = -1$ であることから，

$70\cdot(-12) - 29\cdot(-29) = 1$ となるので，①は

$70(p+12) = 29(q+29)$ と変形することができて，

70と29は互いに素であるから，$\begin{cases} p+12 = 29m \\ q+29 = 70m \end{cases}$ となる整数 m が

存在する. ここで，$m=1$ とすれば $(p, q) = (17, 41)$ となり，これは

題意を満たすものとなっている. $\underline{\therefore (p, q) = (17, 41)}$ //