
ゴウカライズ
解答速報
2024.2.26
東北大学
理系
数学

2024年　東北大学　理系　第一問

a を正の実数とし、$f(x) = x^2 - 2ax + 4a^2$ とする。O を原点とする xy 平面上の放物線 $C : y = f(x)$ の頂点を A とする。直線 OA と C の交点のうち A とする。直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $\mathrm{P}(p, f(p))$ とし、O から C への引いた接線の接点を $\mathrm{Q}(q, f(q))$ とする。ただし、$q > 0$ とする。

(1)　p, q の値を a を用いて表せ。また、$p > q$ であることを示せ。

(2)　放物線 C の $q \leqq x \leqq p$ の部分、線分 OP、及び線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく。S を a を用いて表せ。

(3)　(2) の S に対し、$S = \dfrac{2}{3}$ となるときの a の値を求めよ。

解答

(1)　まず p を a で表す。

任意の x に対し

$$f(x) = (x-a)^2 + 3a^2$$

なので、放物線 C の頂点 A の座標は

$$\mathrm{A}(a, 3a^2)$$

である。

よって、直線 OA の方程式は

$$y = 3ax$$

である。

したがって、p は

$$p^2 - 2ap + 4a^2 = 3ap \text{ かつ } p \neq a$$

の解である。

これを解くと

$$p = 4a.$$

次に q を a で表す。

曲線 C の点 Q における接線の方程式は

$$y = f'(q)(x-q) + f(q)$$

である。

ここで、任意の x に対し

$$f'(x) = 2x - 2a$$

であるからこの接線の方程式は

$$y = (2q - 2a)(x - q) + q^2 - 2aq + 4a^2$$

である。

　これが原点を通るから

$$0 = (2q - 2a)(0 - q) + q^2 - 2aq + 4a^2$$

である。

　これを解くと

$$q = 2a.$$

　(2)　曲線 C は軸が直線 $x = a$ で頂点が $\mathrm{A}(a, 3a^2)$ の放物線である。

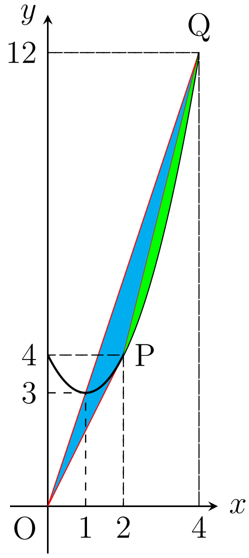
　下図の色付き部分の領域の面積が求める S である。

　ここで、直線 PQ の方程式を $y = l(x)$ とおくと

$$l(x) - f(x) = -(x - 2a)(x - 4a).$$

よって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}|4a \cdot 4a^2 - 12a^2 \cdot 2a| + \int_{2a}^{4a} (l(x) - f(x))dx \\ &= 4a^3 - \int_{2a}^{4a} (x - 2a)(x - 4a)dx \\ &= 4a^3 - 1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)(4a - 2a)^3 \\ &= \frac{16}{3}a^3. \end{aligned}$$



(3)

$$S = \frac{2}{3}$$

となるのは

$$\frac{16}{3}a^3 = \frac{2}{3},$$

すなわち

$$a = \frac{1}{2}.$$

第 2 問

以下の問いに答えよ。

(1) t を $t>1$ を満たす実数とする。正の実数 x が 2 つの条件

(a) $x > \dfrac{1}{\sqrt{t}-1}$

(b) $x \geqq 2\log_t x$

をともに満たすとする。このとき，不等式 $x+1 > 2\log_t(x+1)$ を示せ。

解答.

$$1 > 2\log_t(x+1) - 2\log_t x = 2\log_t\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

を示せば十分である. $t>1$ より

$$\begin{aligned} & 1 > 2\log_t\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ \iff \quad & \sqrt{t} > 1+\frac{1}{x} \\ \iff \quad & \frac{1}{\sqrt{t}-1} < x \end{aligned}$$

であるため示された.

(2) $n \leqq 2\log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ。

解答. $n=1$ のとき, $1 > 2\log_2 1 = 0$ であり条件をみたさない.
$n=2$ のとき, $2 = 2\log_2 2$ であり条件をみたす.
$n=3$ のとき, $3 = \log_2 8$, $2\log_2 3 = \log_2 9$ なので条件をみたす.
$n=4$ のとき, $4 = \log_2 4$ であり条件をみたす.
$n \geqq 5$ のとき $n > 2\log_2 n$ であることを帰納法で示す.
$4 > \sqrt{2}+1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ であることを用いる. ここで, $4 \geqq 2\log_2 4$ であるため, (1) の結果から $5 > 2\log_2 5$ である.
$n \geqq 5$ に対して $n > 2\log_2 n$ が成り立つならば, $n > 4 > \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ と (1) より $n+1 > 2\log_2(n+1)$ が成り立つ.
したがって, 任意の $n \geqq 5$ で $n > 2\log_2(n+1)$ が成り立つ.
以上より, 求める n は $n = 2, 3, 4$ である.

$\boxed{3}$ n を 2 以上の整数とする。それぞれ A, A, B と書かれた 3 枚のカードから無作為に 1 枚抜き出し，カードをもとに戻す試行を考える。この試行を n 回繰り返し，抜き出したカードの文字を順に左から右に並べ，n 文字の文字列を作る。作った文字列内に AAA の並びがある場合は不可とする。また，作った文字列内に BB の並びがある場合も不可とする。これらの場合以外は可とする。たとえば $n=6$ のとき，文字列 AAAABA や ABBBAA や ABBABB や BBBAAA などは不可で，文字列 BABAAB や BABABA などは可である。作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が AA である確率を p_n，作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が BA である確率を q_n，作った文字列が可でかつ右端の文字が B である確率を r_n とそれぞれおく。

(1) p_2, q_2, r_2 をそれぞれ求めよ。また，p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1} を p_n, q_n, r_n を用いてそれぞれ表せ。

(2) $p_n + 2q_n + 2r_n$ を n を用いて表せ。

(3) $p_n + iq_n - (1+i)r_n$ を n を用いて表せ。ただし，i は虚数単位である。

(4) $p_n = r_n$ を満たすための，n の必要十分条件を求めよ。

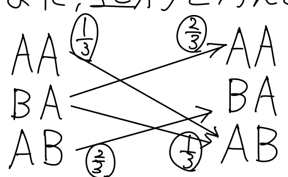
(1) 可である文字列の右端の2文字として有り得るのは AA, BA, AB であり，これらとなる確率はそれぞれ p_n, q_n, r_n である。

特に2文字だけの場合を考えると，

AA … $\left(\frac{2}{3}\right)^2$, BA … $\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)$, AB … $\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)$, BB … $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ であるから，

$p_2 = \frac{4}{9}$, $q_2 = \frac{2}{9}$, $r_2 = \frac{2}{9}$ // である。

また，遷移を考えることで，不可にならないことに注意すれば，



n文字の可な文字列の後ろ2文字

(n+1)文字の可な文字列の後ろ2文字

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n \\ q_{n+1} = \frac{2}{3}r_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n \end{cases}$$ //

(2) $p_{n+1} + 2q_{n+1} + 2r_{n+1} = \frac{2}{3}(p_n + 2q_n + 2r_n)$ であるから，

$$p_n + 2q_n + 2r_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot(p_2 + 2q_2 + 2r_2) = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$ //

(3) $p_{n+1}+iq_{n+1}-(1+i)r_{n+1}$

$$=\frac{2}{3}q_n+i\cdot\frac{2}{3}r_n-(1+i)\left(\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n\right)$$

$$=-\frac{1+i}{3}p_n+\frac{1-i}{3}q_n+\frac{2i}{3}r_n$$

$$=-\frac{1+i}{3}\left\{p_n+iq_n-(1+i)r_n\right\}$$

$$\therefore\ p_n+iq_n-(1+i)r_n=\underline{\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}\cdot\frac{2}{9}}\ //$$

(4) (3)より, $(p_n-r_n)+(q_n-r_n)i=\underbrace{\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}}_{>0}\cdot\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}$

従って, $p_n=r_n \iff \mathrm{Re}\left\{\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}\right\}=0$ であり,

$$\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}=\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)^{n-2}$$

$$=\cos(n-2)\cdot\frac{5}{4}\pi+i\cdot\sin(n-2)\cdot\frac{5}{4}\pi$$ なので,

$$\mathrm{Re}\left\{\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}\right\}=0 \iff \cos\frac{5(n-2)}{4}\pi=0$$

$$\iff \frac{5(n-2)}{4}+\frac{1}{2}\in\mathbb{Z}$$

$$\iff \frac{5}{4}n\in\mathbb{Z}$$

$\iff n$ が4の倍数

$\therefore\ \underline{p_n=r_n \iff n\text{ が4の倍数}}\ //$

$\boxed{4}$ xyz 空間において，点 $P_1(3,-1,1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 と，点 $P_2(5,0,-1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 を考える。

(1) 線分 P_1P_2 の長さを求めよ。

(2) S_1 と S_2 が交わりをもつことを示せ。この交わりは円となる。この円を C とし，その中心を P_3 とする。C の半径および中心 P_3 の座標を求めよ。

(3) (2) の円 C に対し，C を含む平面を H とする。xy 平面と H の両方に平行で，大きさが 1 のベクトルをすべて求めよ。

(4) 点 Q が (2) の円 C 上を動くとき，Q と xy 平面の距離 d の最大値を求めよ。また，d の最大値を与える点 Q の座標を求めよ。

(1) $P_1P_2 = \sqrt{2^2+1+2^2}$

$= 3$

(2) $\sqrt{5}+\sqrt{2} > 3$ を示せばよい。

$\sqrt{5}^2 - 2^2 = 5-4 = 1 > 0$

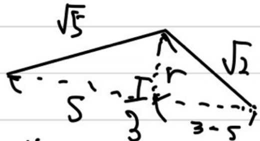
$\sqrt{2}^2 - 1 = 2-1 = 1 > 0$

$\therefore \begin{cases} \sqrt{5} > 2 \\ \sqrt{2} > 1 \end{cases}$

よって $\sqrt{5}+\sqrt{2} > 3$

(2) 続

右図の r が半径となる。



図のように，s，$3-s$ とおくと，

$\sqrt{5}^2 - s^2 = r^2 = \sqrt{2}^2 - (3-s)^2$

$3 = -9+6s$ $\quad \therefore r = 1$

$s = 2$

P_3 は，P_1 と P_2 を $2:1$ に内分したもので

$\dfrac{\overrightarrow{OP_1} + 2\overrightarrow{OP_2}}{3}$

$= \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} + \dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{13}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}$ とおく。$(0 \leq \theta < 2\pi)$

これと平面Hが平行であればよい。

$\overrightarrow{P_1P_2}$ と垂直が条件

$\therefore \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = 0$

$2\cos\theta + \sin\theta = 0$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より

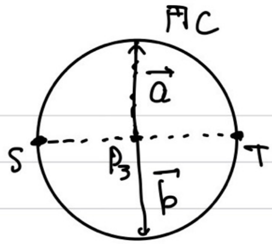
$\cos^2\theta = \dfrac{1}{5}$ $\quad \cos\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin\theta = \mp\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

よって $\begin{pmatrix}\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \mp\frac{2}{\sqrt{5}}\\ 0\end{pmatrix}$

(複号同順)

(4) (3) のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ とすると、

S, T で d は max となる。(右図)



$\overrightarrow{P_3S}$, $\overrightarrow{P_3T}$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと、

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ x-2y=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=2y \\ z=\frac{5}{2}y \\ 5y^2+\frac{25}{4}y^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=\frac{\pm 2}{3\sqrt{5}} \\ x=2y \\ z=\frac{5}{2}y \end{cases}$$

よって、S, T は $\overrightarrow{OP_3} + \begin{pmatrix} \pm\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \pm\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \pm\frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$

$d_{max} = |z座標|$ となるので、

$$d_{max} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{1+\sqrt{5}}{3}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 13-\frac{4}{\sqrt{5}} \\ -1-\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

5 $x \geqq 2$ を満たす実数 x に対し，

$$f(x) = \frac{\log(2x-3)}{x}$$

とおく。必要ならば，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t} = 0$ であること，および，自然対数の底 e が $2 < e < 3$ を満たすことを証明なしで用いてもよい。

(1) $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2(2x-3)}$ とおくとき，関数 $g(x)$ $(x \geqq 2)$ を求めよ。

(2) (1) で求めた関数 $g(x)$ に対し，$g(\alpha) = 0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在することを示せ。

(3) 関数 $f(x)$ $(x \geqq 2)$ の増減と極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を調べ，$y = f(x)$ $(x \geqq 2)$ のグラフの概形を xy 平面上に描け。ただし，(2) の α を用いてよい。グラフの凹凸は調べなくてよい。

(4) $2 \leqq m < n$ を満たす整数 m, n の組 (m, n) に対して，等式

$$(*) \quad (2m-3)^n = (2n-3)^m$$

が成り立つとする。このような組 (m, n) をすべて求めよ。

(1) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}\left\{\dfrac{2}{2x-3}\cdot x - \log(2x-3)\right\} = \dfrac{2x-(2x-3)\log(2x-3)}{x^2(2x-3)}$

$\therefore g(x) = 2x - (2x-3)\log(2x-3)$ //

(2) $g'(x) = 2 - 2\log(2x-3) - (2x-3)\cdot\dfrac{2}{2x-3} = -2\log(2x-3) \leqq 0 \ (\because x \geqq 2)$

であるので $g(x)$ は単調減少であり，

$g(2) = 4 > 0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\{(2x-3)(1-\log(2x-3))+3\} = -\infty$ であるので，

$g(\alpha) = 0$ を満たす実数 $\alpha\,(\geqq 2)$ がただ1つ存在する。

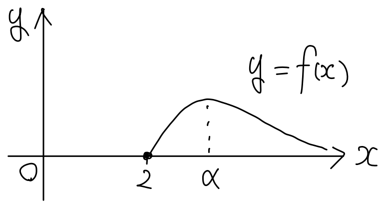
(3) $x \geqq 2$ において $x^2(2x-3) > 0$ であることに注意すれば，

$f'(x)$ の符号は $g(x)$ の符号に一致する。

これより，$y = f(x)$ の増減と概形は以下のようになる。

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(2x-3)}{2x-3}\cdot\frac{2x-3}{x} = 0$ であることを用いた。

x	2	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗		↘



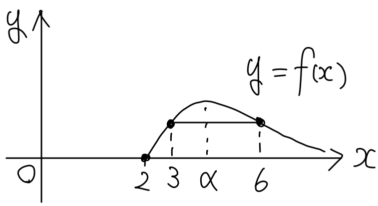
(4) $(2m-3)^n=(2n-3)^m$ の両辺の対数を取り，$mn\ (>0)$ で割ることで，

$$\frac{\log(2m-3)}{m}=\frac{\log(2n-3)}{n}$$ と (*) は同値であることが分かる．

つまり，$f(m)=f(n)$ となる整数 (m, n) の組 $(2\leqq m<n)$ を考えればよく，

まず，$f(2)=0$，$f(3)=\dfrac{\log 3}{3}$，$f(4)=\dfrac{\log 5}{4}$，$f(5)=\dfrac{\log 7}{5}$，

$f(6)=\dfrac{\log 9}{6}=\dfrac{\log 3}{3}$ である．$f(3)=f(6)$ であり，これを先のグラフに



加えると左のようになる．

まず $f(m)=f(n)$ となるとき，

$m<\alpha<n$ となる必要がある．

$(m, n)=(3, 6)$ がこれを満たすので，

$3<\alpha<6$ である．これより $m\leqq 5$ に限られる．

(i) $m=2$ のとき　$f(n)=0$ となる $n\ (>2)$ はない．

(ii) $m=3$ のとき　グラフより $n=6$ が唯一の解．

(iii) $m=4$ のとき　以上より $f(4)$ と $f(5)$ は，4または5でない任意の

2以上の整数 n に対して $f(n)$ より大きい．

ゆえにこのとき $f(4)=f(n)$ の解としてありえるのは

$n=5$ のみであるが，$\dfrac{\log 5}{4}\neq\dfrac{\log 7}{5}$ より解なし．

(iv) $m=5$ のとき　(iii) と同様にして解なし．

$\therefore$ 以上 (i)〜(iv) より $(m, n)=(3, 6)$ //

第 6 問

xyz 空間内の xy 平面上にある円 $C : x^2+y^2=1$ および円板 $D : x^2+y^2 \leqq 1$ を考える。D を底面とし点 $\mathrm{P}(0,0,1)$ を頂点とする円錐を K とする。$\mathrm{A}(0,-1,0)$, $\mathrm{B}(0,1,0)$ とする。xyz 空間内の平面 $H : z=x$ を考える。すなわち，H は xz 平面上の直線 $z=x$ と線分 AB をともに含む平面である。K の側面と H の交わりとしてできる曲線を E とする。$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，円 C 上の点 $\mathrm{Q}(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ をとり，線分 PQ と E の共有点を R とする。

(1) 線分 PR の長さを $r(\theta)$ とおく。$r(\theta)$ を θ を用いて表せ。

解答. R は線分 PQ 上にあるため, $0 \leqq t \leqq 1$ を用いて $\mathrm{R}(t\cos\theta, t\sin\theta, 1-t)$ と表すことができる. R が平面 $z=x$ 上にあることから, $t\cos\theta = 1-t$ であるため, $t=\frac{1}{1+\cos\theta}$ である. これより,

$$r(\theta) = \mathrm{PR} = t\mathrm{PQ} = \sqrt{2}t = \frac{\sqrt{2}}{1+\cos\theta}$$

となる.

(2) 円錐 K の側面のうち，曲線 E の点 A から点 R までを結ぶ部分, 線分 PA, および線分 PR により囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とおく。θ と実数 h が条件 $0 \leqq \theta < \theta + h \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta+h) - S(\theta) \leqq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

解答. 円錐の展開図上で考える. Q, R をそれぞれ $\mathrm{Q}(\theta)$, $\mathrm{R}(\theta)$ と書くことにすると, $S(\theta+h)-S(\theta)$ は円錐のうち線分 $\mathrm{PR}(\theta)$, 線分 $\mathrm{PR}(\theta+h)$, 曲線 E に囲まれた部分の面積に対応する. $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ において $r(\theta)$ が単調増加であることから, この領域の面積は半径 $r(\theta)$ の扇形と半径 $r(\theta+h)$ の扇型の面積により上下から評価することができる. 弧 $\mathrm{Q}(\theta)\mathrm{Q}(\theta+h)$ の長さが h で, 円錐の母線の長さが $\sqrt{2}$ であることから, この扇形の頂角は $\frac{\theta}{\sqrt{2}}$ である. これより,

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta+h) - S(\theta) \leqq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

を得る.

(3) 円錐 K の側面のうち，円 C の $x \geqq 0$ の部分と曲線 E により囲まれた部分の面積を T とおく。T を求めよ。必要であれば $\tan\dfrac{\theta}{2} = u$ とおく置換積分を用いてもよい。

解答. xz 平面に関する対称性から, T は円錐の側面積の半分から $2S(\frac{\pi}{2})$ を引いたものである.
(2) から

$$\frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq \frac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h} \leqq \frac{\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

であり, $h \to 0$ の極限をとることで $S'(\theta) = \frac{r(\theta)^2}{2\sqrt{2}}$ を得る.
これより,

$$\begin{aligned} S\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r(\theta)^2}{2\sqrt{2}} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\cos\theta)^2} d\theta \end{aligned}$$

である. ここで, $u = \tan\frac{\theta}{2}$ とすると $\cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $d\theta = \frac{2}{1+u^2}du$ であるため,

$$\begin{aligned} S\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1}{\left(1+\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2} \frac{2}{1+u^2} du \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 (1+u^2) du \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{4}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

であるため, $T = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} - 2S\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} - \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ である.