
ゴウカライズ
解答速報
2024.2.26
名古屋大学
文系
数学

1 次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $x^3-3x^2-50=0$ の実数解をすべて求めよ。

(2) 実数 p, q が $p+q=pq$ を満たすとする。$X=pq$ とおくとき，p^3+q^3 を X で表せ。

(3) 条件

$$p^3+q^3=50,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p<q$$

を満たす0でない実数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

(1) $f(x)=x^3-3x^2-50$ とおくと， $f(5)=125-75-50=0$ ゆえ，

$f(x)$ は $(x-5)$ を因数にもつ. よって，$f(x)=0$ より

$$(x-5)(x^2+2x+10)=0$$

ここで，$x^2+2x+10=0$ の判別式を D とおくと，

$$D/4=1^2-1\cdot 10=-9<0$$

であることから，この2次方程式は実数解をもたない.

以上より，$x^3-3x^2-50=0$ の実数解は，

$$x=5$$

(のみ)である.

(2)

$$\begin{aligned}p^3+q^3&=(p+q)^3-3pq(p+q)\\&=(pq)^3-3pq\cdot pq\\&=X^3-3X^2\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ より $\dfrac{p+q}{pq}=1$ すなわち $p+q=pq$ である.

よって，(2)の過程を用いて，$pq=X$ とおくと，$p^3+q^3=50$ から，

$$X^3-3X-50=0$$

ここで，p, q が実数のとき，$X=pq$ も実数ゆえ，(1)より $X=5$ である.

したがって，$pq=p+q=5$ であり，解と係数の関係から，p, q は

2次方程式 $t^2-5t+5=0$ の解である. これを解くと，

$$t=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 5}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$$

であり，$p<q$ であることから，

$$(p, q)=\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},\ \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$$

である.

2 t を0でない実数として，x の関数 $y=-x^2+tx+t$ のグラフを C とする。

(1) C 上において y 座標が最大となる点Pの座標を求めよ。

(2) Pと点O(0，0)を通る直線を ℓ とする。ℓ と C がP以外の共有点Qを持つために t が満たすべき条件を求めよ。また，そのとき，点Qの座標を求めよ。

(3) t は(2)の条件を満たすとする。A$(-1,\ -2)$として，$X=\frac{1}{4}t^2+t$ とおくとき，$\mathrm{AP}^2-\mathrm{AQ}^2$ を X で表せ。また，AP＜AQとなるために t が満たすべき条件を求めよ。

(1)

$$\begin{aligned} y &= -x^2+tx+t \\ &= -\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+\frac{t^2}{4}+t \end{aligned}$$

よって，y は $x=\frac{t}{2}$ のとき最大値 $\frac{t^2}{4}+t$ をとるので，

$$\mathrm{P}\left(\frac{t}{2},\ \frac{t^2}{4}+t\right)$$

である．

(2) ℓ は原点を通り，傾きが $\dfrac{\frac{t^2}{4}+t}{\frac{t}{2}}=\frac{t}{2}+2$ の直線であるから，

$$\ell : y=\left(\frac{t}{2}+2\right)x$$

である．ℓ と C との共有点は

$$\begin{cases} y=\left(\frac{t}{2}+2\right)x & \cdots ① \\ y=-x^2+tx+t & \cdots ② \end{cases}$$

の解によるものである．①,②より

$$x^2+\left(2-\frac{t}{2}\right)-t=0$$

$$\left(x-\frac{t}{2}\right)(x+2)=0 \qquad \cdots ③$$

①より，x と y は1対1に対応することに注意すると，ℓ と C がP以外の共有点をもつのは，③の解 $x=\frac{t}{2}$，$x=-2$ が相異なるときである．したがって，t が満たすべき条件は，$\frac{t}{2}\neq -2$ すなわち $t\neq -4$ である．

このとき，Qの y 座標は $\left(\frac{t}{2}+2\right)\cdot(-2)=-t-4$ であるので，

$$\mathrm{Q}\,(-2,\ -t-4)$$

である．

(3)

$$\begin{aligned} \mathrm{AP}^2 &= \left\{\frac{t}{2}-(-1)\right\}^2+\left\{\frac{t^2}{4}+t-(-2)\right\}^2 \\ &= \frac{t^2}{4}+t+1+(X+2)^2 \\ &= X^2+5X+5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{AQ}^2 &= \{-2-(-1)\}^2+\{-t-4-(-2)\}^2 \\ &= 1+t^2+4t+4 \\ &= 4X+5 \end{aligned}$$

よって，

$$\mathrm{AP}^2-\mathrm{AQ}^2=X^2+X$$

である．

$\mathrm{AP}>0,\ \mathrm{AQ}>0$ で，$\mathrm{AP}-\mathrm{AQ}=\dfrac{\mathrm{AP}^2-\mathrm{AQ}^2}{\mathrm{AP}+\mathrm{AQ}}$

であることから，

$$\begin{aligned} \mathrm{AP}-\mathrm{AQ}<0 &\iff \mathrm{AP}^2-\mathrm{AQ}^2<0 \\ &\iff X^2+X<0 \\ &\iff X(X+1)<0 \\ &\iff -1<X<0 \end{aligned}$$

であるので，

$$-1<\frac{1}{4}t^2+t<0$$

である．

$-1<\frac{1}{4}t^2+t$ すなわち $(t+2)^2>0$ より

$$t\neq -2$$

であり，

$\frac{1}{4}t^2+t<0$ すなわち $t(t+4)<0$ より

$$-4<t<0$$

である．したがって，求める条件は，

$$-4<t<-2,\quad -2<t<0$$

である．

3 n を自然数とする。表と裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインを n 回投げ，以下のように得点を決める。

- 最初に数直線上の原点に石を置き，コインを投げて表なら2，裏なら3だけ数直線上を正方向に石を移動させる。コインを k 回投げた後の石の位置を a_k とする。
- $a_n \neq 2n+2$ の場合は得点を0，$a_n = 2n+2$ の場合は得点を $a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$ とする。

たとえば，$n=3$ のとき，投げたコインが3回とも表のときは得点は0，投げたコインが順に裏，裏，表のときは得点は $3+6+8=17$ である。

(1) n 回のうち裏の出る回数を r とするとき，a_n を求めよ。

(2) $n=4$ とする。得点が0でない確率および25である確率をそれぞれ求めよ。

(3) $n=9$ とする。得点が100である確率および奇数である確率をそれぞれ求めよ。

(1) $n-r$ 回 $+2$ 進み，r 回 $+3$ 進むので，

$$a_n = 2(n-r)+3r = 2n+r$$

(2) $2n+r = 2n+2$ となるのは $r=2$ のときだから，得点が0でないのは裏がちょうど2回出るときで，その確率は

$${}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$$

である．

裏が2回出るのは以下の6通りであり，それぞれの得点は以下の通り．

	a_1	a_2	a_3	a_4	得点
オオウウ	2	4	7	10	23
オウオウ	2	5	7	10	24
ウオオウ	3	5	7	10	25
オウウオ	2	5	8	10	25
ウオウオ	3	5	8	10	26
ウウオオ	3	6	8	10	27

よって，得点が25となるのは2通りである．

さらに，4回のコインの出方は $2^4=16$ 通りでこれらは同様に確からしいことから，得点が25となる確率は

$$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

である．

(3) まず，得点が0でないことより，裏が出る回数は2回である．

すべて表であるときと比べて，k 回目，l 回目 $(1 \leqq k < l \leqq 9)$ に裏が出たときは，

$a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{l-1}$ が $+1$ され

$a_l, a_{l+1}, \cdots, a_9$ が $+2$ される

ので，合計得点は，

$$2+4+\cdots+18+1\times(9-k+1)+1\times(9-l+1)$$
$$=110-(k+l)$$

である．よって，得点が100となるのは

$$k+l=10$$

となるときで，$1 \leqq k < l \leqq 9$ であることに注意すると，k, l の組は

$$(k, l) = (1,9), (2,8), (3,7), (4,6)$$

の4通りである．

また，9回のコインの出方は $2^9=512$ 通りで，これらは同様に確からしいことから，得点が100となる確率は

$$\frac{4}{512} = \frac{1}{128}$$

である．

合計得点が奇数となるのは，

$k+l$ が奇数，すなわち k, l の一方のみが奇数のときであり，$1 \leqq k < l \leqq 9$ であることに注意すると，k, l の組は

$(k, l) = (1,2), (1,4), (1,6), (1,8),$
$(2,3), (2,5), (2,7), (2,9),$
$(3,4), (3,6), (3,8),$
$(4,5), (4,7), (4,9),$
$(5,6), (5,8),$
$(6,7), (6,9),$
$(7,8),$
$(8,9)$

の20通りである．したがって，得点が奇数である確率は

$$\frac{20}{512} = \frac{5}{128}$$

である．