
ゴウカライズ
解答速報
2024.2.26
名古屋大学
理系
数学

2024年　名古屋大学　理系　第一問

関数 $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\quad(x>0)$ に対して、$y=f(x)$ のグラフを C とする。

(1)　f(x) の極値を求めよ。

(2)　x 軸上の点 $\mathrm{P}(t,0)$ から C にちょうど2本の接線を引くことができるとする。そのような実数 t の値の範囲を求めよ。

(3)　(2) において、C の2つの接点の x 座標を $\alpha,\beta\quad(\alpha<\beta)$ とする。α,β がともに整数であるような組 (α,β) をすべて求めよ。

---

(1)　任意の $x>0$ に対し

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)$$

である。

よって、f の正の実数全体における増減表は以下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	(∞)	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	(∞)

したがって、f は極小値 $2\sqrt{2}$ をもつ。

(2)　点 $(s,f(s))\quad(s>0)$ における曲線 C の接線の方程式は

$$y=f'(s)(x-s)+f(s),$$

つまり

$$y=\frac{1}{\sqrt{s}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{s}\right)(x-s)+\sqrt{s}+\frac{2}{\sqrt{s}}$$

である。

これが $(t,0)$ を通る必要十分条件は

$$0=\frac{1}{\sqrt{s}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{s}\right)(t-s)+\sqrt{s}+\frac{2}{\sqrt{s}}$$

である。

つまり

$$s^2+(t+6)s-2t=0$$

である。

ここで、実数全体を定義域とする関数 g を

$$g(x) = x^2 + (t+6)x - 2t \quad (x \in \mathbb{R})$$

と定める。

$y = g(x)$ のグラフは

$$g(x) = \left(x + \frac{t+6}{2}\right)^2 - \frac{t^2+20t+36}{4} \quad (x \in \mathbb{R})$$

なので、軸が直線 $x = -\dfrac{t+6}{2}$ で頂点が $\left(-\dfrac{t+6}{2}, -\dfrac{t^2+20t+36}{4}\right)$ の下に凸の放物線である。

求める t の条件は

$$g(x) = 0 \text{ となる正の実数 } x \text{ が } 2 \text{ つ存在する}$$

ことである。

これは

$$-\frac{t+6}{2} > 0 \text{ かつ } g\left(-\frac{t+6}{2}\right) < 0 \text{ かつ } g(0) > 0$$

が成り立つことと同値である。

つまり

$$t < -18$$

である。

(3)　(2) における C の接点の x 座標 $\alpha, \beta \quad (\alpha < \beta)$ は

$$g(\alpha) = g(\beta) = 0$$

を満たすことが必要十分である。

これは解と係数の関係を用いると

$$\alpha + \beta = -(t+6) \text{ かつ} \alpha\beta = -2t.$$

と同値である。

つまり

$$\alpha\beta = -2t \text{ かつ } (\alpha - 2)(\beta - 2) = 16$$

である。

$(\alpha - 2)(\beta - 2) = 16$ を満たす整数 $\alpha, \beta \quad (\alpha < \beta)$ は

$$(\alpha, \beta) = (3, 18), (4, 10), (-14, 1), (-6, 0)$$

である。

この中で $\alpha + \beta = -(t+6)$ を満たすものは

$$(\alpha, \beta) = (3, 18), (4, 10).$$

.

II

c を 1 より大きい実数とする．また，i を虚数単位として，$\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ とおく．複素数 z に対して

$$P(z)=z^3-3z^2+(c+2)z-c,\ Q(z)=-\alpha^7z^3+3\alpha^6z^2+(c+2)\alpha z-c$$

と定める．

(1) 方程式 $P(z)=0$ を満たす複素数 z をすべて求め，それらを複素数平面上に図示せよ．

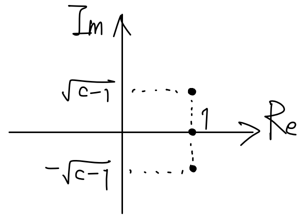
(2) 方程式 $Q(z)=0$ を満たす複素数 z のうち実部が最大のものを求めよ．

(3) 複素数 z についての 2 つの方程式 $P(z)=0,\ Q(z)=0$ が共通解 β を持つとする．そのときの c の値と β を求めよ．

(1) $P(z)=(z-1)(z^2-2z+c)$ より，

$P(z)=0$ の解は $\underline{z=1,\ 1\pm\sqrt{c-1}\,i}$ // で，

これを図示すると右のようになる．



(2) $\alpha=\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi$ である．ゆえに $\alpha^4=-1$

$Q(\overline{\alpha})=-\alpha^4+3\alpha^4+(c+2)-c=0$ である．

これより $Q(z)=(z-\overline{\alpha})(-\alpha^7z^2+2\alpha^6z+\alpha c)$

$=-\dfrac{1}{\alpha}(z-\overline{\alpha})(z^2+2\alpha^3z+\alpha^6c)$ より，

$Q(z)=0$ の解は $z=\dfrac{1+i}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}+\dfrac{1\mp\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}i$

(∵ $(z+\alpha^3)^2=(1-c)\alpha^6=(c-1)\cdot(-i)$ より

$z+\alpha^3=\pm\sqrt{c-1}\cdot\alpha$ であり，

$z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\pm\sqrt{c-1}\cdot\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$)

∴ 実部が最大のものは $\underline{\dfrac{1+\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}+\dfrac{1-\sqrt{c-1}}{\sqrt{2}}i}$ //

(3) $P(z)=0$ の解の実部が 1 であることから，共通解を持つとき

$Q(z)=0$ の解に実部が 1 となるものが存在して，それは

(2) で求めたものに限られる．これより $c=4-2\sqrt{2}$ で，

このとき $\beta=1+(\sqrt{2}-1)i$ である．(実際に共通解となっている)

$\underline{\therefore\ c=4-2\sqrt{2},\ \beta=1+(\sqrt{2}-1)i}$ //

III

座標空間の 3 点 A(3, 1,3), B(4, 2, 2), C(4, 0, 1) の定める平面を H とする．また，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad (s,\ t \text{ は非負の実数})$$

を満たすすべての点 P からなる領域を K とする．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ．

(2) 原点 O(0,0,0) から平面 H に下した垂線の足を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

(3) 領域 K 上の点 P に対して，線分 QP 上の点で $\overrightarrow{\mathrm{AR}} = r\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (r は非負の実数) を満たす点 R が存在することを示せ．

(4) 領域 K において原点 O からの距離が最小となる点 S の座標を求めよ．

(1) $\overrightarrow{AB}=(1,1,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(1,-1,-2)$ であるから，

$\underline{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=3,\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=6,\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2}$ //

(2) Q は H 上にあるので，$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$ とおけ，(k, l: 実数)

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$ である．

いま，$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ かつ $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ である．

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=1$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=-4$ であるから，

$$\begin{cases}\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \iff \begin{cases}1+3k+2l=0\\ -4+2k+6l=0\end{cases} \iff \begin{cases}k=-1\\ l=1\end{cases}$$

$\therefore\ \underline{\overrightarrow{AQ}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}$ // また，これより Q(3, −1, 2) である．

(3) $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}=(s+1)\overrightarrow{AB}+(t-1)\overrightarrow{AC}$ であり，

線分PQ上の点Rは0以上1以下の実数 u を用いて，

$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AQ}+u\overrightarrow{QP}=\{u(s+1)-1\}\overrightarrow{AB}+\{u(t-1)+1\}\overrightarrow{AC}$ と表せ，

これが $r\overrightarrow{AC}$ と一致するとき，$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ は一次独立なので，

(3) $\begin{cases} u(s+1)-1=0 & \text{—①} \\ u(t-1)+1=r(\geqq 0) & \text{—②} \end{cases}$ を満たす $u(0\leqq u\leqq 1)$ が

s, t によらず存存することを示せばよく,

$s\geqq 0$ より $0<\dfrac{1}{s+1}\leqq 1$ なので, $u=\dfrac{1}{s+1}$ とすると,

①は満たされて, このとき②より

$r=u(t-1)+1\geqq 1\cdot(-1)+1=0$ となる.

∴このような R は存在する ▨

(4) K 上の点は $(s+t+3, s-t+1, -s-2t+3)$ と表せ,

これと O の距離は,

$$\sqrt{\underbrace{(s+t+3)^2+(s-t+1)^2+(-s-2t+3)^2}_{=:f(s,t)\text{とおく.}}}$$ である.

$f(s,t)$ の $s\geqq 0, t\geqq 0$ における最小化を考える.

$$\begin{aligned} f(s,t) &= 3s^2+4st+2s+6t^2-8t+19 \\ &\geqq 6t^2-8t+19 \quad (\because s\geqq 0, t\geqq 0) \\ &= 6\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{49}{3} \\ &\geqq \frac{49}{3} \end{aligned}$$

で, $s=0, t=\frac{2}{3}$ で全ての等号は成立する.

補足; (3)を利用すると $s=0$ であることが楽に示せる

$\therefore\ s=0,\ t=\frac{2}{3}$ のときの P が S であり,

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$\therefore S\left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ //

第 4 問

袋の中にいくつかの赤玉と白玉が入っている。すべての玉に対する赤玉の割合を p $(0 \leqq p \leqq 1)$ とする。袋から無作為に玉を一つ取り出して袋に戻す操作を行う。試行を n 回行うとき，赤玉を k 回以上取り出す確率を $f(k)$ とおく。

(1) $n \geqq 2$ に対して，$f(1)$ と $f(2)$ を求めよ。

解答. 試行を n 回行ったとき, 赤玉をちょうど 0 回取り出す確率, ちょうど 1 回取り出す確率はそれぞれ $(1-p)^n$, $np(1-p)^{n-1}$ である．これより, $f(1) = 1-(1-p)^n$, $f(2) = 1-(1-p)^n - np(1-p)^{n-1}$ である.

(2) $k = 1, 2, \cdots\cdots, n$ に対して，等式

$$f(k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$$

を示せ。

解答. $I(k) = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\displaystyle\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$ とおく.
このとき, $I(1) = f(1)$ であることと, 任意の $1 \leqq k \leqq n-1$ に対して $I(k+1)-I(k) = f(k+1)-f(k)$ であることとを示せば十分である.
前者は

$$I(1) = \frac{n!}{0!(n-1)!}\int_0^p (1-x)^{n-1}\,dx = n\left[-\frac{1}{n}(1-x)^n\right]_0^p = 1-(1-p)^n$$

から成り立つ.
後者について, 左辺は

$$\begin{aligned}
I(k+1)-I(k) &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\int_0^p x^k(1-x)^{n-k-1}\,dx - \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left((n-k)\int_0^p x^k(1-x)^{n-k-1}\,dx - k\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\int_0^p \left((n-k)x^k(1-x)^{n-k-1} - kx^{k-1}(1-x)^{n-k}\right)\,dx \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left[-x^k(1-x)^{n-k}\right]_0^p \\
&= -\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

である．右辺は, $f(k)-f(k+1)$ は赤玉をちょうど k 回取り出す確率であることから

$$f(k+1)-f(k) = -\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

となる.
これより, $I(1) = f(1)$ および $I(k+1)-I(k) = f(k+1)-f(k)$ が示されたので任意の $1 \leqq k \leqq n$ に対して $f(k) = I(k)$ である.

(3) 自然数 k に対して，定積分

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^k (1-x)^k \, dx$$

を求めよ。

解答. $n = 2k+1$, $p = \frac{1}{2}$ の場合を考える．このとき, 対称性より $f(k+1) = \frac{1}{2}$ である．
また, (2) より

$$f(k+1) = \frac{(2k+1)!}{k!k!} \int_0^{\frac{1}{2}} x^k (1-x)^k \, dx = \frac{(2k+1)!}{k!k!} I$$

である.
これより, $I = \dfrac{(k!)^2}{2(2k+1)!}$ である.