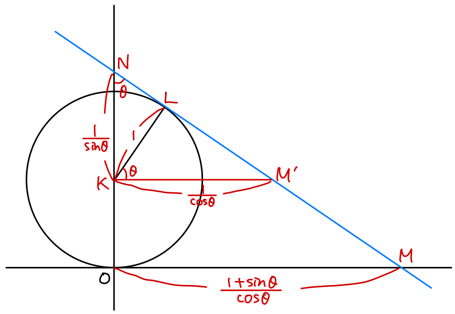
[I] 円 $C: x^2+(y-1)^2=1$ に接する直線で，x 切片，y 切片がともに正であるものを ℓ とする。C と ℓ と x 軸により囲まれた部分の面積を S，C と ℓ と y 軸により囲まれた部分の面積を T とする。$S+T$ が最小となるとき，$S-T$ の値を求めよ。

相似な直角三角形がたくさん出てくるので，
三角比を主役にすると簡潔に表現できる



円Cの中心をK，円Cと直線ℓの接点をLとおき，直線KLとx軸とのなす角をθとおく．直線ℓのx切片，y切片が正であることより，

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

である．

また，直線ℓとx軸，y軸との交点をそれぞれM, Nとおき，Kを通るx軸に平行な直線と直線ℓとの交点をM′とおく．

$\angle KNL=\theta$ より $KN=\dfrac{KL}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}$

$\angle M'KL=\theta$ より $KM'=\dfrac{KL}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}$

$\triangle NKM' \backsim \triangle NOM$ に注目して

$$KM':OM=NK:NO=\frac{1}{\sin\theta}:\frac{1}{\sin\theta}+1$$

$$\therefore\ OM=\frac{\frac{1}{\sin\theta}+1}{\frac{1}{\sin\theta}}KM'=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

よって，

$$S+T=(\triangle OMN\text{の面積})-(\text{円}C\text{の半分の面積})$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\theta}+1\right)\cdot\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\pi}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}+\frac{2}{\cos\theta}+\tan\theta\right)}_{=f(\theta)\text{とおく}}-\frac{\pi}{2}$$

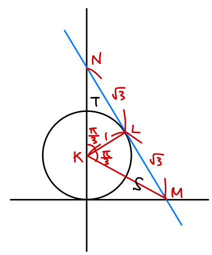
$$f'(\theta)=-2\frac{2\cos2\theta}{\sin^2 2\theta}-2\frac{-\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$=\frac{2\sin^3\theta+3\sin^2\theta-1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$=\frac{(\sin\theta+1)^2(2\sin\theta-1)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

よって，$f(\theta)$の増減は以下の通り．

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		↘		↗	

したがって，$\theta=\frac{\pi}{6}$ のときに $S+T$ は最小となる．

$\theta=\frac{\pi}{6}$ なので，S, Tは図形的に簡単に求められる．



このとき，上図のようになり，

$$S=\left\{(\triangle LKM\text{の面積})-\left(\begin{matrix}\text{中心角}\frac{\pi}{3}\text{の}\\\text{扇形の面積}\end{matrix}\right)\right\}\times2$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\times2$$
$$T=\left\{(\triangle LKN\text{の面積})-\left(\begin{matrix}\text{中心角}\frac{\pi}{3}\text{の}\\\text{扇形の面積}\end{matrix}\right)\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$$

である．したがって，

$$S-T=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$$

である．

[Ⅱ]　n を自然数とし，数 $1, 2, 4$ を重複を許して n 個並べてできる n 桁の自然数全体を考える。そのうちで3の倍数となるものの個数を a_n，3で割ると1余るものの個数を b_n，3で割ると2余るものの個数を c_n とする。

(1)　a_{n+1} を b_n, c_n を用いて表せ。同様に，b_{n+1} を a_n, c_n を用いて，c_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ。　$b_n = 3k+1$

(2)　a_{n+2} を n と c_n を用いて表せ。

(3)　a_{n+6} を n と a_n を用いて表せ。

(4)　a_{6m+1} $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ を m を用いて表せ。

(1) 数1,2,4を重複を許してn個並べてできるn桁の自然数全体をS_nとする.
一般に,自然数Nに対して,十進法表記された数Nを3で割った余りと,Nの各位の数の和を3で割った余りが一致することから,

S_{n+1}に含まれる3の倍数は,
Ⓐ S_nに含まれる,3で割ると1余る数の最高位に2を足す
Ⓑ S_nに含まれる,3で割ると2余る数の最高位に1または4を足す

ことによってのみ表される.したがって,このことから
$\underline{a_{n+1} = b_n + 2c_n}$ //　b_n, c_nについても同様に考えることで
$\underline{b_{n+1} = 2a_n + c_n}$ //　$\underline{c_{n+1} = a_n + 2b_n}$ //

(2) まず,S_nの元の個数は3^nであるので,$a_n + b_n + c_n = 3^n$ ― ①
これより,$a_{n+2} = b_{n+1} + 2c_{n+1} = 4(a_n + b_n) + c_n = \underline{4 \cdot 3^n - 3c_n}$ //

(3) (2)と同様にして,$b_{n+2} = 4 \cdot 3^n - 3a_n$, $c_{n+2} = 4 \cdot 3^n - 3b_n$だから,

$$\begin{aligned}
a_{n+6} &= 4 \cdot 3^{n+4} - 3c_{n+4} \\
&= 4 \cdot 3^{n+4} - 3 \cdot 4 \cdot 3^{n+2} + 3^2 \cdot b_{n+2} \\
&= 4 \cdot 3^{n+4} - 4 \cdot 3^{n+3} + 3^2 \cdot 4 \cdot 3^n - 3^3 \cdot a_n \\
&= 4 \cdot 3^{n+2}(3^2 - 3 + 1) - 3^3 \cdot a_n \\
&= \underline{-27a_n + 28 \cdot 3^{n+2}} \text{ //}
\end{aligned}$$

(4) $a_1 = 0$であり,(3)で得た式に$n = 6m+1$を代入し,$A_m := a_{6m+1}$とすると,
$A_{m+1} = -27A_m + 28 \cdot 3^{6m+3}$ $(m \geqq 0)$, $A_0 = 0$ となる.

(4) $A_{m+1}=-27A_m+28\cdot 3^{6m+3}$ の両辺を $3^{6m+6}(>0)$ で割って,

$$\frac{A_{m+1}}{3^{6(m+1)}}=-\frac{1}{27}\cdot\frac{A_m}{3^{6m}}+\frac{28}{27}$$, $\frac{A_m}{3^{6m}}=:B_m$ とおけば, $B_0=0$ で,

$$B_{m+1}=-\frac{1}{27}B_m+\frac{28}{27}$$

$$B_{m+1}-1=-\frac{1}{27}(B_m-1)$$

$$B_m-1=\left(-\frac{1}{27}\right)^m(B_0-1)$$

$B_m=1-\left(-\frac{1}{27}\right)^m$ となるので, $a_{6m+1}=3^{6m}\cdot B_m=\underline{3^{6m}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{3m}\right\}}$ //

[☆ポイント

a_n, b_n, c_n の漸化式はサイクリックな形であることに着目して変形する]

[III] 点O, A, B, Cを頂点とする四面体OABCを考える。辺OA, OB, OCの中点をそれぞれP, Q, Rとし，辺BC, CA, ABの中点をそれぞれS, T, Uとする。

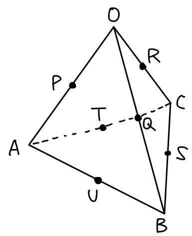
(1) 辺PS, QT, RUが1点で交わることを示せ。

(2) $OA^2+BC^2=OB^2+CA^2=OC^2+AB^2$ のとき，点P, Q, R, S, T, Uが同一球面上にあることを示せ。

(3) (2)において，辺PSが辺OA, BCと直交するとし，辺OA, BCの長さをそれぞれa, kとする。点P, Q, R, S, T, Uを頂点とする八面体の体積Vをaとkを用いて表せ。

(4) (3)において，$k=1$のとき八面体の体積Vの最大値を求めよ。

(1)



対称的な状況なので，交わるなら中点で交わりそう！
→ 辺PS, QT, RUの中点をそれぞれK_1, K_2, K_3とおいて，これらが一致することを言えばよい．

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく．また，辺PS, QT, RUの中点をそれぞれK_1, K_2, K_3とおく．

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$ より

$$\overrightarrow{OK_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OS})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{OT}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a})$ より

$$\overrightarrow{OK_2}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OT})=\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{a})$$

$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}\vec{c}$, $\overrightarrow{OU}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ より

$$\overrightarrow{OK_3}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OU})=\frac{1}{4}(\vec{c}+\vec{a}+\vec{b})$$

以上より，K_1, K_2, K_3は一致するので，これをKと表すと，辺PS, QT, RUは一点Kで交わる． □

(2) 対称的な状況を生かして計算する

$\overrightarrow{PK}=\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$ より

$$|\overrightarrow{PK}|^2=\frac{1}{16}\{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a})\} \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{QK}=\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{4}(\vec{c}+\vec{a}-\vec{b})$ より

$$|\overrightarrow{QK}|^2=\frac{1}{16}\{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})\} \quad \cdots ②$$

$\overrightarrow{RK}=\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OR}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$ より

$$|\overrightarrow{RK}|^2=\frac{1}{16}\{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a})\} \quad \cdots ③$$

一方，

$$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2$$

より，

$$|\vec{a}|^2+|\vec{c}-\vec{b}|^2=|\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{c}|^2=|\vec{c}|^2+|\vec{b}-\vec{a}|^2$$

$$\therefore \quad \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

これと①,②,③より，

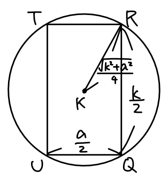
$$|\overrightarrow{PK}|^2=|\overrightarrow{QK}|^2=|\overrightarrow{RK}|^2 \quad \therefore |\overrightarrow{PK}|=|\overrightarrow{QK}|=|\overrightarrow{RK}|$$

である．さらに，Kは辺PS, QT, RUの中点であったので，

$$|\overrightarrow{PK}|=|\overrightarrow{SK}|,\ |\overrightarrow{QK}|=|\overrightarrow{TK}|,\ |\overrightarrow{RK}|=|\overrightarrow{UK}|$$

である．以上より，点P, Q, R, S, T, Uは，Kを中心とする同一球面上にある． □

(3) Q, R, T, Uは同一円周上にあり，さらに中点連結定理より $QU=RT=\frac{a}{2}$, $QR=UT=\frac{k}{2}$ であることから，四角形QRTUは以下のような長方形である．



また，

PS⊥OA, OA//QUより，PS⊥QU,

PS⊥BC, BC//QRより，PS⊥QR

であることから，直線PSは，Q, R, T, Uを含む面と垂直に交わる．さらに，辺QR, TU, QU, RTの中点をそれぞれM, N, V, Wとおくと，Kは辺MN, VWの中点であることと，辺PSは△PBC, △SOAの中線であることから，辺PSはKを通ることも分かる．したがって，四角錐P-QRTUにおいて高さは $PK=RK=\frac{\sqrt{k^2+a^2}}{4}$ であり，これは四角錐S-QRTUにおいても同様．

以上より，

$$V=2\times\frac{a}{2}\times\frac{k}{2}\times\frac{\sqrt{k^2+a^2}}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{ka\sqrt{k^2+a^2}}{24}$$

である．

(4) 解答不能

◎Vの最大値がないことの証明

体積比から2Vが四面体OABC
の体積、これより
$2V>0$ を満たすことが
$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ が四面体を成す、
つまり $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ が一次独立
であるための必要十分条件で
このときA、B、Cは存在する
aが任意の値で $2V>0$ を満たし

$$V=\frac{1}{24}\sqrt{a^4+a^2}\left(=\frac{1}{24}\sqrt{f(a)}\text{とする}\right)$$

$$f'(a)=a(4a^2+2)>0$$

と単調増加のため、Vの最大値はない

[IV]　2つのチーム W, K が n 回試合を行う。ただし，$n \geqq 2$ とする。各試合での W, K それぞれの勝つ確率は $\frac{1}{2}$ とし，引き分けはないものとする。W が連敗しない確率を p_n とする。ただし，連敗とは2回以上続けて負けることを言う。

(1)　p_3 を求めよ。

(2)　p_{n+2} を p_{n+1} と p_n を用いて表せ。

(3)　以下の2式を満たす α, β を求めよ。ただし，$\alpha < \beta$ とする。

$$p_{n+2} - \beta p_{n+1} = \alpha(p_{n+1} - \beta p_n)$$
$$p_{n+2} - \alpha p_{n+1} = \beta(p_{n+1} - \alpha p_n)$$

(4)　p_n を求めよ。

(1) まず，W, Kはそれぞれの勝つ確率が $\frac{1}{2}$ であるので，n 回の全ての勝敗のパターン(2^n 通り)が，同様に確からしい．
このことから，3回の全ての勝敗のパターンを考えると，以下○はWの勝ちを，×はKの勝ちを表すことにして，
○○○，○○×，○×○，×○○，○××，×○×，××○，×××の8通りのうち，連敗していないものは波線で表した5通りであるので，$p_3 = \frac{5}{8}$ //

(2) n 回試合を行い，Wが連敗せず，n 戦目がWの勝ちである確率を q_n とおき，n 戦目がKの勝ちである確率を r_n とおく．
$p_n = q_n + r_n$ であり，$r_{n+1} = \frac{1}{2} q_n$，$q_{n+1} = \frac{1}{2} p_n$ である．
そして，$p_{n+1} = q_n + \frac{1}{2} r_n$ であるから，
$$p_{n+2} = q_{n+1} + \frac{1}{2} r_{n+1} = \frac{1}{2}(q_{n+1} + r_{n+1}) + \frac{1}{2} q_{n+1} = \frac{1}{2} p_{n+1} + \frac{1}{4} p_n$$ //

(3) α, β は $p_{n+2} = (\alpha+\beta) p_{n+1} - \alpha\beta p_n$ を満たすことと，(2)の式から，
$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{1}{2} \\ \alpha\beta = -\frac{1}{4} \end{cases}$$
を満たし，このような α, β は $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$ の解なので，
これを解くと，$\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ //　$\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ //

(4) (3)から,

$$\begin{cases} p_{n+1}-\beta p_n=\alpha^{n-1}\cdot(p_2-\beta p_1) & \text{— ①} \\ p_{n+1}-\alpha p_n=\beta^{n-1}\cdot(p_2-\alpha p_1) & \text{— ②} \end{cases}$$

② − ① より

$$(\beta-\alpha)p_n=\beta^{n-1}\cdot(p_2-\alpha p_1)-\alpha^{n-1}\cdot(p_2-\beta p_1)$$

ここで, $p_1=1$, $p_2=\frac{3}{4}$ であり, (3)の α, β の値を代入すれば,

$$p_n=\frac{2\sqrt{5}}{5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{2+\sqrt{5}}{4}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{2-\sqrt{5}}{4}\right)\right\}$$ //

[☆ポイント
確率漸化式の立式は,最後に着目して場合分けすると良い!]

※補足

(2)は汎用性のある解法として q_n, r_n をおくものを紹介したが,
この問題に関しては q_n, r_n をおかずとも,
$(n+2)$回目の勝敗に着目すれば,

- $\underbrace{\text{連敗なし}}_{(n+1)\text{回分}}$ ○
- $\underbrace{\text{連敗なし}}_{n\text{回分}}$ ○ ×

左図の2ケースしかなく
これらは排反なので

$P_{n+2}=\frac{1}{2}P_{n+1}+\frac{1}{4}P_n$ とできる.

[V]　xy 平面上において，以下の媒介変数表示をもつ曲線を C とする。

$$\begin{cases} x = \sin t + \dfrac{1}{2}\sin 2t \\ y = -\cos t - \dfrac{1}{2}\cos 2t - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

ただし，$0 \leqq t \leqq \pi$ とする。

(1)　y の最大値，最小値を求めよ。

(2)　$\dfrac{dy}{dt} < 0$ となる t の範囲を求め，C の概形を xy 平面上に描け。

(3)　C を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(1)

$$y = -\cos t - \frac{1}{2}(2\cos^2 t - 1) - \frac{1}{2}$$

$$= -\left(\cos t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$ ← この式をtで微分するとすぐに因数分解の形にできて楽

$-1 \leqq \cos t \leqq 1$ より最大値 $\frac{1}{4}$、最小値 -2

(2)

$$\frac{dy}{dt} = -2\left(\cos t + \frac{1}{2}\right)(-\sin t) = 2\left(\cos t + \frac{1}{2}\right)\sin t$$

$\frac{dy}{dt} < 0$ を満たすのは $\sin t \geqq 0$ から

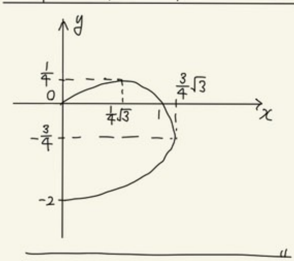
$\sin t \neq 0$ かつ $\cos t < -\frac{1}{2}$ $\iff$ $\frac{2}{3}\pi \leqq t < \pi$

一方で

$$\frac{dx}{dt} = \cos t + \cos 2t = (2\cos t - 1)(\cos t + 1)$$ より

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2}{3}\pi$		π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
$\frac{dy}{dt}$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0
$\binom{x}{y}$	$\binom{0}{-2}$	↗	$\binom{\frac{3}{4}\sqrt{3}}{-\frac{3}{4}}$	↖	$\binom{\frac{1}{4}\sqrt{3}}{\frac{1}{4}}$	↙	$\binom{0}{0}$

より



が概形

(2)

曲線 $C \iff \begin{cases} y = x_1 \ \left(\frac{2}{3}\pi \leqq t \leqq \pi\right) \\ y = x_2 \ \left(0 \leqq t \leqq \frac{2}{3}\pi\right) \end{cases}$

と定めると求める体積Vは（右につづく）

$$\frac{V}{\pi} = \int_{-2}^{\frac{1}{4}} x_2^2\, dy - \int_0^{\frac{1}{4}} x_1^2\, dy$$

$$dy = (2\cos t + 1)\sin t\, dt$$

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} x_2^2 (2\cos t + 1)\sin t\, dt - \int_\pi^{\frac{2}{3}\pi} x_1^2 (2\cos t + 1)\sin t\, dt$$

流石にちょっと楽をしたい

$$= \int_0^\pi \left(\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 (2\cos t + 1)\sin t\, dt$$

tに揃えると…　位相に注目するとtで揃えるのは容易

$$= \int_0^\pi (1 - \cos^2 t)(1 + \cos t)^2 (2\cos t + 1)\sin t\, dt$$

$\int g(\cos t)/\sin t\, dt$ の微分形　接触

$$= \int_{-1}^1 (1 - u^2)(1 - u)^2(-2u + 1)\, du \quad (-\cos t = u)$$

$$= 2\int_0^1 (1 + 4u^2 - 5u^4)\, du$$

$$= 2\left[u + \frac{4}{3}u^3 - u^5\right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

$$\therefore V = \frac{8}{3}\pi$$