
ゴウカライズ
解答速報
2024.2.19
早稲田大学
教育学部
数学

1 次の各問の解答を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(1) $\frac{4}{9}$ を2進法の循環小数で表せ。

(2) $x$ 座標, $y$ 座標, $z$ 座標がすべて整数であるような $xyz$ 空間の点を格子点と呼ぶ。頂点がすべて格子点であるような $xyz$ 空間内の正6角形の1辺の長さの最小値を求めよ。

(3) $xy$ 平面上の多角形で, $x$ 軸はこの多角形の対称軸であり, 直線 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ もこの多角形の対称軸であるものを考える。このような多角形の辺の数の最小値を求めよ。

(4) $xy$ 平面上に3点 O$(0,0)$, A$(1,0)$, B$(1,1)$ をとる。点 $(x,y)$ が三角形 OAB の周および内部を動くときに点 $(x+y, xy)$ が動く範囲の面積を求めよ。

(1) $\frac{4}{9}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ($\forall n\in\mathbb{Z}$, $a_n=0$ または $1$) と表すことにすると,
$\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$ より, $m\leqq 1$ において $a_m=0$ である. —①
$2^6\cdot\frac{4}{9}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n+6}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ であるから,
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(a_{n+6}-a_n)\left(\frac{1}{2}\right)^n=2^6\cdot\frac{4}{9}-\frac{4}{9}=28=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}+1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.
これより, $n\neq -2,-3,-4$ において $a_{n+6}=a_n$ かつ $a_2=a_3=a_4=1$
これと①より, $a_n$ の各項は定まり, 特に $\frac{4}{9}=\underline{0.0\dot{1}1100\dot{0}_{(2)}}$ である.

(2) まず1辺の長さは $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ($a,b,c$ は非負整数) の形で表されるものに限る. そして, 小さい順に $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ である.
正六角形の頂点を順に A, B, C, D, E, F とする.

1辺の長さが1となるものがあると仮定する.
A$(0,0,0)$, B$(1,0,0)$ としても一般性を失わず, BC$=1$ とするには
C の候補は $(1\pm1,0,0)$, $(1,\pm1,0)$, $(1,0,\pm1)$ があるが, どれにしても
$\angle ABC=60°$ とならないため矛盾. ∴ 1辺の長さ1のものはない

次に, $A(1,0,0)$, $B(2,0,1)$, $C(2,1,2)$, $D(1,2,2)$, $E(0,2,1)$, $F(0,1,0)$ と取ると, これらは同一平面 $(x+y-z=1)$ 上にあり,
$AB=BC=CD=DE=EF=FA=\sqrt{2}$ かつ
$\angle BAF=\angle CBA=\angle DCB=\angle EDC=\angle FED=\angle AFE$ である(内積計算から従う)ので, 六角形ABCDEFは
1辺の長さが$\sqrt{2}$の正六角形となる. $\therefore$ 最小値 $\sqrt{2}$ //

(3) まず, 多角形の辺の数を $n$ とする. $(n\geqq 3)$
次に, 条件を整理すると, $x$軸と $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ のなす角は$30°$であるから, 考える多角形は対称軸を最低2つ持ち, そのうちなす角が$30°$のものが少なくとも1つあることが分かる.
これより, 正六角形は明らかに条件を満たすので, $n\leqq 5$ の場合について条件を満たす多角形の構成が存在するかを考えればよい.

(i) $n=3$ のとき

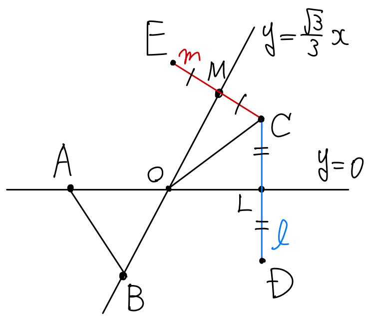
対称軸を2本以上持つには正三角形である必要があるも,
このときそれらがなす角は常に$60°$であるから存在しない.

(ii) $n=4$ のとき

対称軸を2本以上持つには長方形またはひし形である必要があるも,
このときそれらがなす角は常に$45°$か$90°$であるから存在しない.

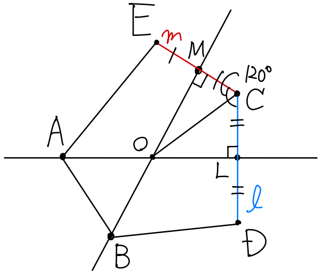
(iii) $n=5$ のとき

条件を満たす五角形の構成が存在すると仮定すると,
対称軸は必ず1頂点と1辺の中点を通ることに注意すれば,




左図のように $y=0$, $\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上の頂点A, B, 点M, Nとそれらを中点とする辺 $l$, $m$ が存在することになる.
五角形の辺は5本なので $l$ と $m$ が交わるしかなく, 交点をC, Cでない方の辺 $l$, $m$ の端点をそれぞれD, Eとする.

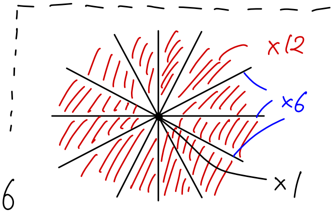
(3)




以上より, $n=5$ において構成があるとすれば,
左図のような凸五角形ABDCEに限られ,
直線ALに関する対称性から,
$\angle AEC=120^\circ$, $\angle EAL=\angle BAL=30^\circ$
直線BMに関する対称性から,
$\angle BDC=120^\circ$, $\angle ABM=\angle DBM=30^\circ$

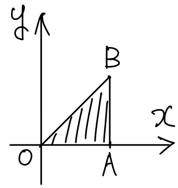
以上よりこの凸五角形の内角の和は $480^\circ$ となるもこれは矛盾.
∴このような五角形は存在せず, 以上から $n\leqq 5$ における構成は存在しない.

∴求める辺の数の最小値は $\underline{6}$




★別解: 対称移動で重なることを考えれば,
$n\equiv 0,1 \pmod 6$ が必要と分かり, $n\geqq 6$
特に $n=6$ のとき正六角形が条件を満たす. $\underline{∴最小値6}$

(4)

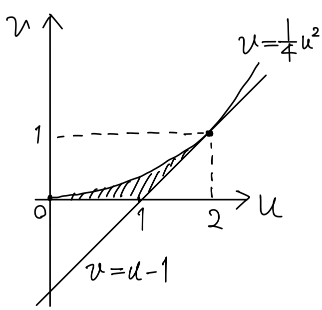



$\begin{cases} 0\leqq y\leqq x\leqq 1 \text{ を満たす領域を } D \\ 0\leqq x\leqq y\leqq 1 \text{ を満たす領域を } E \end{cases}$ とする.
いま, $(x, y)$ は $D$ をくまなく動く. ところで, $(x+y, xy)$ が動く範囲は, $x$ と $y$ の対称性から, $(x, y)$ が $D$ を動くときも $E$ を動くときも同じであるので, $(x, y)$ は $D\cup E$ をくまなく動くものとしてよい. 以下そうすると,

$\begin{cases} u=x+y \\ v=xy \end{cases}$ とおくと, $x, y$ は $t^2-ut+v=0$ の2解であり, これが $0\leqq t\leqq 1$ に(重解を含む)2解を持てばよいから, $f(t)=t^2-ut+v$ として, $f(t)=0$ の判別式を $D$ として,

$$\begin{cases} D\geqq 0 \\ f(0)\geqq 0 \\ f(1)\geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u^2-4v\geqq 0 \\ v\geqq 0 \\ 1-u+v\geqq 0 \end{cases}$$

で, これを $uv$ 平面に図示すると以下のようになる.




これより求める面積は,

$$\int_0^2 \frac{1}{4}u^2\,du-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$$

$$=\underline{\frac{1}{6}}$$

★ポイント
実数解条件への言い換え

## 早稲田大学教育学部 数学 第二問

3 つの複素数 $z_1, z_2, z_3$ に関する条件 $P$ を次のように定める。

$P$:「$z_1, z_2, z_3$ はどれも 0 ではなく、互いに異なり、かつ

$$\{z_1^n \mid n \text{ は整数}\} = \{z_2^n \mid n \text{ は整数}\} = \{z_3^n \mid n \text{ は整数}\}$$

である。」

次の問いに答えよ。

(1)　3 つの複素数 $z_1, z_2, z_3$ が条件を満たしているとする。このとき $|z_1| = 1$ であることを示せ。また集合 $\{z_1 \mid n \text{ 整数}\}$ の要素の個数は有限であることを示せ。

(2)　条件 $P$ を満たす 3 つの複素数 $z_1, z_2, z_3$ のうち、集合 $\{z_1 \mid n \text{ 整数}\}$ の要素の個数が最小となるものを考える。このとき $\{z_1 \mid n \text{ 整数}\}$ を求めよ。

---

(1)　まず、$|z_1| = 1$ を示す。$i = 2, 3$ とする。

$z_1 \neq z_2$ かつ $\{z_1^n \mid n \text{ は整数}\} = \{z_i^n \mid n \text{ は整数}\}$ なので

$$z_1 = z_i^{l_i} \text{かつ } z_i = z_1^{m_i} \quad \cdots ①$$

となる相異なる整数 $l_i, m_i$ が存在する。

①より

$$z_1 = z_1^{l_i m_i}$$

である。

$z_1 \neq 0$ なので

$$z_1^{l_i m_i - 1} = 1$$

である。

両辺絶対値をとると

$$|z_1^{l_i m_i - 1}| = 1$$

つまり

$$|z_1|^{l_i m_i - 1} = 1$$

である。

ここで、$l_i, m_i$ は相異なるから $l_i m_i \neq 1$ なので

$$|z_1| = 1$$

である。

次に、集合 $\{z_1 \mid n \text{ は整数}\}$ の要素の個数は有限であることを示す。

$|z_1| = 1$ なので、ある実数 $\theta$ が存在して

$$z_1 = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta \quad \cdots ②$$

このとき、ド・モアブルの定理より

$$z_2 = \cos m_i\theta + \sqrt{-1}\sin m_i\theta$$

この式の両辺を $l_i$ 乗してド・モアブルの定理を用いると

$$z_2^{l_i} = \cos l_i m_i\theta + \sqrt{-1}\sin l_i m_i\theta$$

① から

$$z_1 = \cos l_i m_i\theta + \sqrt{-1}\sin l_i m_i\theta \quad \cdots ③$$

である。

②, ③ から、ある整数 $k$ が存在して

$$l_i m_i\theta = \theta + 2k\pi$$

つまり、ある整数 $k$ が存在して

$$\theta = \frac{2k}{l_i m_i - 1}\pi \quad (\because l_i m_i \neq 1).$$

よって

$$z_1^{l_i m_i - 1} = z_1^{-(l_i m_i - 1)} = 1$$

であるから、これと指数法則により

$$\{z_1^n \mid n \text{ は整数}\}$$

は有限集合である。

(2)

$$\{z_1^n \mid n \text{ は整数}\} = \left\{\cos\frac{2n}{5}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{2n}{5}\pi \mid n \text{ は整数}\right\}$$

である。

$\because$　命題 [1], [2], [3] を示せば良い。

[1]　$z_1, z_2, z_3$ が条件 $P$ を満たし

$$\{z_1^n \mid n \text{ は整数}\}$$

の要素の個数が $m$ であるならば、

$$m \text{ は } l_i m_i - 1 \text{ の倍数}$$

である。

(証明)　$z_1, z_2, z_3$ が条件 $P$ を満たし、$\{z_1^n \mid n \text{ は整数}\}$ の要素の個数を $m$ とする。このとき

$$1 \in \{z_1^n \mid n \text{ は整数}\}$$

でありある整数 $k$ が存在して

$$\theta = \frac{2k}{l_i m_i - 1}\pi \quad (\because l_i m_i \neq 1).$$

から、

$$m \text{ は } l_i m_i - 1 \text{ の倍数}$$

である。　([1] の証明終わり)

[2]　$z_1, z_2, z_3$ が条件 $P$ を満たすとき

$$\{z_1^n \mid n \text{ は整数}\}$$

の要素の個数は 5 以上である。

(証明)　まず $1 \in \{z_1^n \mid n \text{ は整数}\}$ であり $z_1, z_2, z_3$ は相異なるので

$$\{z_1^n \mid n \text{ は整数}\}$$

の要素の個数は 4 以上である。

$$\{z_1^n \mid n \text{ は整数}\}$$

の要素の個数が 4 つであるとする。このとき [1] から

$$z_j = \pm 1, \pm i \quad (j = 1, 2, 3)$$

だが、これを満たし、条件 $P$ を満たす複素数の組 $(z_1, z_2, z_3)$ は存在しない。

([2] の証明終わり)

[3]

$$\{z_j^n \mid n \text{ は整数 }\} = \left\{\cos\frac{2n}{5}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{2n}{5}\pi \mid n \text{ は整数}\right\} \quad (j = 1, 2, 3)$$

が条件 $P$ を満たし、これ以外で

$$\{z_1^n \mid n \text{ は整数 }\}$$

の要素の個数が 5 であるものは存在しない。

(証明)　$z_1, z_2, z_3$ が条件 $P$ を満たすとする。
[1] から

$$\theta = \frac{2k}{5}\pi.$$

を満たす整数 $k$ が存在する。

$$\zeta_5 = \cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi$$

とおく。
ド・モアブルの定理を用いると

$$\begin{aligned}
\zeta_5 &= (\zeta_5^2)^3 = (\zeta_5^3)^2 = (\zeta_5^4)^4, \\
\zeta_5^2 &= (\zeta_5^2)^1 = (\zeta_5^3)^4 = (\zeta_5^4)^3, \\
\zeta_5^3 &= (\zeta_5^2)^4 = (\zeta_5^3)^1 = (\zeta_5^4)^2, \\
\zeta_5^4 &= (\zeta_5^2)^2 = (\zeta_5^3)^3 = (\zeta_5^4)^1, \\
\zeta_5^5 &= (\zeta_5^2)^5 = (\zeta_5^3)^5 = (\zeta_5^4)^5
\end{aligned}$$

と指数法則から、この 4 つの複素数 $\zeta_5, \zeta_5^2, \zeta_5^3, \zeta_5^4$ から相異なる 3 つを選んでそれらを複素数の組 $(z_1, z_2, z_3)$ とすれば、条件 $P$ を満たし、しかも

$$\{z_1^n \mid n \text{ は整数 }\}$$

の要素の個数は 5 個である。

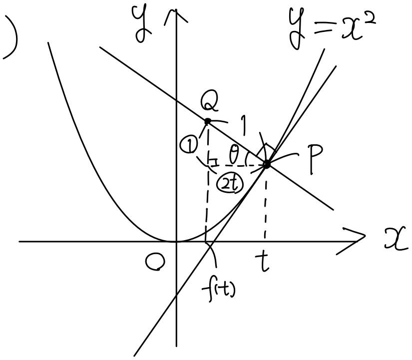
([3] の証明終わり)

3 放物線 $C : y = x^2$ 上に点 $\mathrm{P}(t, t^2)$ をとる。$C$ の点 P における法線上に点 Q を，PQ $= 1$ であり，点 Q の $y$ 座標が点 P の $y$ 座標よりも大きくなるようにとる。点 Q の $x$ 座標を $f(t)$ とおく。次の問いに答えよ。

（1）$f(t)$ を求めよ。

（2）$t$ が $0 \leqq t$ の範囲を動くときの $f(t)$ の最小値を求めよ。

(1)




$C$ の $x=t$ における法線は，$t \neq 0$ のとき

$y = -\frac{1}{2t}(x-t) + t^2 = -\frac{1}{2t}x + \left(t^2 + \frac{1}{2}\right)$

このとき $x$ 軸と法線のなす角を $\theta$ とする.

(i) $t > 0$ のとき

$-\frac{1}{2t} < 0$ より $f(t) = t - \cos\theta$ で，

$\cos\theta = \frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}}$ だから，

$f(t) = t - \frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}}$ である.

(ii) $t < 0$ のとき

$-\frac{1}{2t} > 0$ より $f(t) = t + \cos\theta$ で，$\cos\theta = -\frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}}$ だから，

このときも $f(t) = t - \frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}}$ である.

(iii) $t = 0$ のとき

法線は $x = 0$ より $\mathrm{Q}(0, 1)$ で，$f(t) = 0$. これは

$f(t) = t - \frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}}$ で $t=0$ としたものに一致する.

∴ 以上(i)〜(iii)より $\underline{f(t) = t - \frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}}}$ //

(2) $t = \frac{1}{2}\tan u \left(0 \leq u < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$f(t) = \frac{1}{2}\tan u - \sin u$ である.

$\frac{df}{du} = \underbrace{\frac{1}{2\cos^2 u}}_{>0}(1 - 2\cos^3 u)$ より，$\frac{df}{du} = 0$ となる $u$ がただ1つあり，

(2) このuをαとすると、f(t)の増減表は以下.

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}\tan\alpha$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $u$ | $0$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ |
| $\frac{df}{du}$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $0$ | $\searrow$ | $f(\frac{1}{2}\tan\alpha)$ | $\nearrow$ |

$f(\frac{1}{2}\tan\alpha)$について、$\alpha$は$\cos^3\alpha=\frac{1}{2}$を満たすから、$\cos\alpha=2^{-\frac{1}{3}}$であり、

$\sin\alpha=\sqrt{1-2^{-\frac{2}{3}}}$ $(\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2})$

$\tan\alpha=\sqrt{2^{\frac{2}{3}}-1}$ となる.

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\tan\alpha\right)=\frac{1}{2}\tan\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2^{\frac{2}{3}}-1}-\sqrt{1-2^{-\frac{2}{3}}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}\right)\sqrt{2^{\frac{2}{3}}-1}$$

$$=-\frac{1}{2}(2^{\frac{2}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}$$

$\therefore$ 求める$t\geqq 0$における$f(t)$の最小値は、$\underline{-\frac{1}{2}(2^{\frac{2}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}}$ //

[ ☆ポイント
変数の置換 $\begin{cases}\sqrt{x^2+a^2} \text{ は } x=a\tan\theta \\ \sqrt{x^2-a^2} \text{ は } x=a\sin\theta\end{cases}$ と置くと良い ]

4 $xy$ 平面上の原点Oを中心とする単位円を考える。この円周上に点Pをとり，Oを極，$x$ 軸の正の部分を始線とする点Pの偏角を $\theta$ とする。さらに、偏角が $3\theta$ となる点Qをこの円周上にとる。点Pを通る $x$ 軸に垂直な直線と点Qを通る $y$ 軸に垂直な直線の交点をRとする。次の問いに答えよ。

（1）$\theta$ が0から $2\pi$ まで変化するとき，点Rの軌跡の概形をかけ。

（2）（1）の点Rの軌跡によって囲まれた部分の面積を求めよ。

（3）（1）の点Rの軌跡によって囲まれた部分を，$x$ 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

(1) 対称性に注目して簡潔に議論する.

$P(\cos\theta, \sin\theta)$, $Q(\cos3\theta, \sin3\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq2\pi)$

Rの$x$座標, $y$座標はそれぞれ Pの$x$座標, Qの$y$座標に等しいので, $R(\cos\theta, \sin3\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq2\pi)$ である.

$R(x(\theta), y(\theta))$ とおくと,

$$x(\theta) = \cos\theta$$

$$y(\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

である. ここで,

$$x(2\pi-\theta) = \cos(2\pi-\theta) = \cos\theta = x(\theta)$$

$$y(2\pi-\theta) = 3\sin(2\pi-\theta) - 4\sin^3(2\pi-\theta) = -3\sin\theta + 4\sin^3\theta = -y(\theta)$$

であることより, Rの軌跡は$x$軸対称である. また,

$$x(\pi-\theta) = \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta = -x(\theta)$$

$$y(\pi-\theta) = 3\sin(\pi-\theta) - 4\sin^3(\pi-\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = y(\theta)$$

であることより, Rの軌跡は$y$軸対称である.

以上より, $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ の部分についてRの推移を調べればよい.

$$x'(\theta) = -\sin\theta$$

$$y'(\theta) = 3\cos\theta - 12\sin^2\theta\cos\theta = 3\cos\theta(1-4\sin^2\theta)$$

より, $(x(\theta), y(\theta))$ の推移は以下のよう.

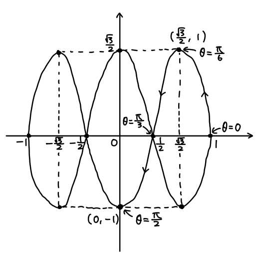
| $\theta$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x'(\theta)$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ |
| $y'(\theta)$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $(x(\theta), y(\theta))$ | $\uparrow$ | $\nwarrow$ | $\leftarrow$ | $\swarrow$ | $\leftarrow$ |
| | $(1, 0)$ | | $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ | | $(0, -1)$ |

また, $y(\theta)=0$ より $3\sin\theta(1-\frac{4}{3}\sin^2\theta)=0$

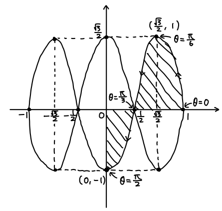
$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{3}$

このとき $x(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

したがって, 対称性から, Rの軌跡の概形は以下のよう.




(2)




Rの軌跡は$x$軸, $y$軸について対称だから, 上図の斜線部について調べて4倍すればよい. 求める面積をSとおくと,

$$\frac{S}{4} = \int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} -y\,dx + \int_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} y\,dx$$

$$= \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{3}} -\sin3\theta(-\sin\theta)\,d\theta + \int_{\theta=\frac{\pi}{3}}^{\theta=0} \sin3\theta(-\sin\theta)\,d\theta$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin3\theta\sin\theta}_{=-\frac{1}{2}(\cos4\theta-\cos2\theta)}\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin3\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos4\theta - \cos2\theta)\,d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos4\theta - \cos2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin4\theta}{4} - \frac{\sin2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin4\theta}{4} - \frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{4} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{4} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\therefore\ S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(3) (2)と同様に, 上図の斜線部について調べて, それを2倍すればよい. 求める体積をVとおくと,

$$\frac{V}{2} = \pi\int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} (-y)^2\,dx + \pi\int_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} y^2\,dx$$

$$= \pi\int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{3}} (-\sin3\theta)^2(-\sin\theta)\,d\theta + \pi\int_{\theta=\frac{\pi}{3}}^{\theta=0} \sin^2 3\theta(-\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 3\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos6\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin7\theta - \sin5\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\left[\frac{-\cos7\theta}{7} - \frac{-\cos5\theta}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5}\right) = \cancel{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{70} = \frac{18\pi}{35}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{70} = \frac{18\pi}{35}$$

$$\therefore\ V = \frac{36\pi}{35}$$