
ゴウカライズ
解答速報
2024.2.21
早稲田大学
商学部
数学

(1) $\left|\dfrac{2024n}{1-46n}+44\right|<\dfrac{1}{2025} \iff -\dfrac{1}{2025}<\dfrac{44}{1-46n}<\dfrac{1}{2025}$

$\iff -\dfrac{1}{2025}<\dfrac{44}{1-46n}\quad\left(\because \dfrac{44}{1-46n}<0\right)$

$\iff 2025<\dfrac{46n-1}{44}$

$\iff n>\dfrac{44\times 2025+1}{46}=1936.9\ldots$

$\therefore n=1937$

(2) $\{a_n\}$が正整数列であることに注意して

$a_2{}^3<27$より$a_2<3$で, これと$\dfrac{a_1}{a_2}<1$から$a_2=2$.

$a_3{}^3<27\cdot 2^4=432$より$a_3\leqq 7$で, これと$\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}<1$から

$a_3=5$または6または7.

(i) $a_3=5$のとき

$a_4{}^3<27\cdot a_3{}^4=16875$より$a_4\leqq 25$となるも, このとき

$\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{a_i}{a_{i+1}}\geqq \frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{5}{25}>1$より条件を満たす$a_4$はない.

(ii) $a_3=6$のとき

$a_4{}^3<27\cdot a_3{}^4=34992$より$a_4\leqq 32$となるも, このとき

$\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{a_i}{a_{i+1}}\geqq \frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{6}{32}>1$より条件を満たす$a_4$はない.

(iii) $a_3=7$のとき,

$a_4{}^3<27\cdot a_3{}^4=64827$より$a_4\leqq 40$であり,

$\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{a_i}{a_{i+1}}=\frac{1}{2}+\frac{2}{7}+\frac{7}{a_4}<1$より $33\leqq a_4$ $\quad\therefore 33\leqq a_4\leqq 40$

このとき, $a_5{}^3<27\cdot a_4{}^4\leqq 27\cdot 40^4$より$a_5\leqq 410$であり,

$\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\frac{a_i}{a_{i+1}}>\frac{1}{2}+\frac{2}{7}+\frac{7}{40}+\frac{33}{410}>1$より, a_4をどのように定めたとしても

条件を満たすa_5は存在しない.

∴以上よりa_nのとりうる最大値は40 (空気を読むとこれが解答)

(注) この問題文ではnが決められていて, そのnに対するa_nの取りうる最大値と読む方が自然なので,

$$\begin{cases} 1 & (n=1) \\ 2 & (n=2) \\ 7 & (n=3) \\ 40 & (n=4) \\ \text{最大値なし} & (n\geqq 5) \end{cases}$$

と書く方が適切な気がします…

(3) $a_1 = C > 0$ より $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$ が従うので、

与漸化式で $C(\neq 1)$ を底とする対数を取れて、$b_n = \log_C a_n$ とおくと、

$(n+1)b_n + n b_{n+1} = -(2n+1)$ で、両辺を $(-1)^{n+1}\cdot n(n+1)$ で割って、$C_n = (-1)^n \cdot \frac{b_n}{n}$ とおくと、

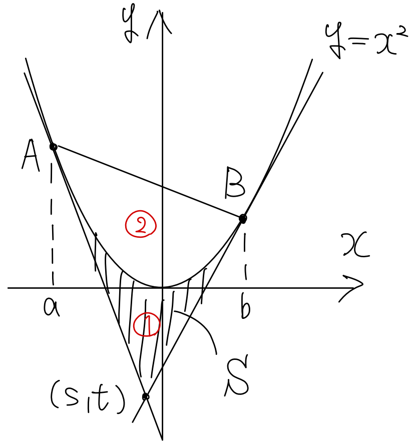
$C_{n+1} - C_n = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$ となるので、以下 $n \geq 2$ において

$C_n - C_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(C_{k+1} - C_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) = -1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ で、$C_1 = -b_1 = -1$ より、

$n \geq 2$ で $C_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} - 2$ である。これは $n=1$ でも成立。

$b_n = \frac{n}{(-1)^n} \cdot C_n = (-1)^{n+1} \cdot 2n - 1$　　∴ $a_n = C^{(-1)^{n+1}\cdot 2n - 1}$ //

(4)



左図のように $a, b\ (a<b)$ を定めると、

$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}(b-a)^3 = \frac{144}{125}$ より、

$(b-a)^3 = \frac{12^3}{5^3}$, $b - a = \frac{12}{5}$

これと、$s = \frac{a+b}{2}$ より、

$s = a + \frac{6}{5}$ で、

$t = 2as - a^2$ より、

$t = 2(s - \frac{6}{5})s - (s - \frac{6}{5})^2$

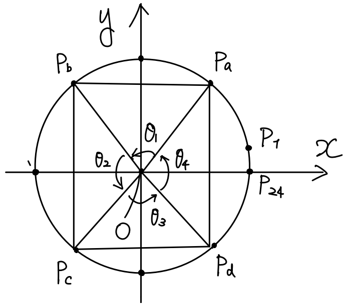
$= s^2 - \frac{36}{25}$

逆に $t = s^2 - \frac{36}{25}$ 上の任意の点から C に異なる2本の接線が引けて、

このとき PA, PB と C で囲まれた図形の面積は $\frac{144}{125}$ となる。

∴ $t = s^2 - \frac{36}{25}$ //

2.(1)



$O(0,0)$として，左図のように$\theta_i\,(i=1\sim4)$を定める．

ここで，$\theta_i=\dfrac{k_i+6}{12}\pi\,(i=1\sim4)$と整数$k_i$を用いて置くことができて，$\displaystyle\sum_{i=1}^{4}k_i=0$である．$(-6\leqq k_i\leqq 15)$

Rの面積を$|R|$で表すことにする．

そして，$|R|=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\sin\theta_i=\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sin\left(\dfrac{k_i+6}{12}\pi\right)$である．

まず，$|R|\leqq\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{4}1=2$であり，$k_i=0\,(i=1\sim4)$のときに$|R|=2$となるから，$S_1=2$．

次に，u, vを$-6\leqq u\leqq v\leqq 6$なる整数として，$(k_1,k_2)=(u,v)$のときの$\sin\left(\dfrac{u+6}{12}\pi\right)+\sin\left(\dfrac{v+6}{12}\pi\right)$を$f(u,v)$とおく．

これと，$f(x,-x)$が$0\leqq x\leqq 6$において単調減少であることから，$f(u,v)$についての大小関係が定まる．―(*)

次に，$(k_1,k_2,k_3,k_4)=(p,q,r,s)$であるRの面積を$S(p,q,r,s)$で表す．（ただし，$p,q,r,s$はいずれも$-6$以上6以下の整数とする．）

ここで，(p,q,r,s)の任意の入れ替え(p_0,q_0,r_0,s_0)に対しても$S(p,q,r,s)$の値は不変であり，

また$S(p,q,r,s)=S(-p,q,r,s)$が成立する．

そして，$S(p,q,r,s)=\dfrac{1}{2}\{f(p,q)+f(r,s)\}$であることに注意して，

$|p|\leqq|q|\leqq|r|\leqq|s|$である$(p,q,r,s)$に対して，

一般に$S(p,q,r,s)\leqq S(p,-p,0,0)$であり，

$S(p,-p,0,0)=\dfrac{1}{2}\underbrace{f(p,-p)}_{|p|に対して単調減少}+(定数)$であるので，以上から

$(p,q,r,s)\neq(0,0,0,0)$なる任意の(p,q,r,s)に対して

$S(p,q,r,s)\leqq S(1,-1,0,0)$が成立する．

$\therefore S_2=S(-1,0,0,1)=\dfrac{1}{2}\left(\sin\dfrac{5}{12}\pi+2\cdot\sin\dfrac{6}{12}\pi+\sin\dfrac{7}{12}\pi\right)=\underline{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+4}{4}}$ //

(2) $p \leqq q \leqq r \leqq s$ であるものとする. $S_3 = S(-1,-1,1,1)$ であることを示す.

$S(p,q,r,s) > S(-1,-1,1,1)$ を満たす $(p,q,r,s)\ (\neq (0,0,0,0), (-1,0,0,1))$ が存在すると仮定する. このとき p,q,r,s のいずれかは 0 である必要がある.

$p=0$ または $s=0$ とすると $(p,q,r,s)=(0,0,0,0)$ となるので,

以下, $ps \neq 0$ かつ ($q=0$ または $r=0$) である場合を考える.

特に, $S(p,q,r,s) = S(-s,-r,-q,-p)$ であるので $q=0$ の場合のみ考えればよく,

(i) $q=0$ かつ $r=0$ のとき (このとき仮定より $p \neq -1, 0$)

$S(p,q,r,s) \leqq S(-2,0,0,2)$ であるも, ($\because$ (*))

$S(-2,0,0,2) = \frac{1}{2}f(-2,0) + \frac{1}{2}f(0,2) < \frac{1}{2}f(-1,-1) + \frac{1}{2}f(1,1) = S(-1,-1,1,1)$ であるから

このとき条件を満たす (p,q,r,s) はない.

(ii) $q=0$ かつ $r \geqq 1$ のとき (このとき $p \leqq -2$, $s \geqq 1$)

$S(p,q,r,s) \leqq S(-2,0,1,1)$ であるも,

$S(-2,0,1,1) = \frac{1}{2}f(-2,0) + \frac{1}{2}f(1,1) < \frac{1}{2}f(-1,-1) + \frac{1}{2}f(1,1) = S(-1,-1,1,1)$ であるから

このとき条件を満たす (p,q,r,s) はない.

$\therefore$ 以上よりこのような (p,q,r,s) はなく, $S_3 = S(-1,-1,1,1)$

そして, このようになる A, B, C, D の取り方の組について,

A を固定して考えれば, 6通りに限られることから,

求める確率は $\dfrac{6}{{}_{23}C_3} = \dfrac{6}{1771}$ //

(A を固定せず, $\dfrac{12+24}{{}_{24}C_4} = \dfrac{6}{1771}$ と求めてもよい.)

3 座標空間において，4 点を A(0, 0, 2), B(−1, 0, 4), C(1, 1, 0), D(0, 0, 1) とする．次の設問に答えよ．

(1) P を直線 AB 上の点とするとき，三角形 PCD の面積の最小値を求めよ．

(2) Q, R を直線 CD 上の 2 点とし，QR $= \sqrt{3}$ とする．三角形 QAB の面積と三角形 RAB の面積の和の最小値を求めよ．

(1)

$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$、$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ この2本に

垂直なベクトルの1つに$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$が存在し

$\vec{n}$を法線ベクトルに持つAを通る平面

$2x - y + z - 2 = 0$ ― ①

とDとの距離である

$$\frac{|2\cdot 0 - 0 + 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

が直線AB上の点と直線DCの距離の最小値であり、これが△PCDのCDを底辺としたときの高さの最小値

$\triangle PCD = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} |\overrightarrow{DC}| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ //

(2)

$\dfrac{\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{DC}||\overrightarrow{AB}|} = -\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ これと(1)よりQRを①

に射影したものをQ′R′とする

$\overrightarrow{AB}$方向をx軸とするQ′のy座標をl

とするとlは直線CDを①に射影した

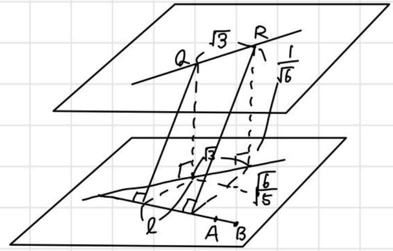
直線上を動くので任意の実数値を取り

RをQよりx軸負方向に取っても一般性

を損わず、このときRのy座標はSとして

$$m = l - \sqrt{3}\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2}$$

$$= l - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \quad \text{で表せる}$$



これより

$\triangle QAB + \triangle RAB = \dfrac{AB}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + |l|^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + |m|^2}\right)$

これは

直線$x = 0$上の点をS、T$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$、U$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\right)$

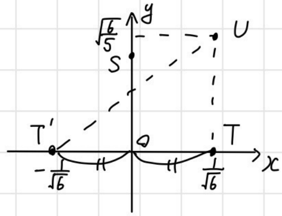
としたときのST + SUが最小のとき最小値をとる、Tの$x = 0$での対称点をT′

T′Uと$x = 0$の交点は$\alpha\left(0, \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}\right)$で

三角不等式より

$ST + SU = ST' + SU \geqq T'U = \alpha T' + \alpha U$

より$S = \alpha$で最小を取るとわかる



以上より

$$\triangle QAB + \triangle RAB = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{3}{10}} + \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{3}{10}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{7}{3}}$$ //