1.

(1)　等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とすると、初項 $a_1 = 25$ から

$$a_n = 25 + (n-1)d \quad (n = 1, 2, \cdots,)$$

なので

$$a_8 = 25 + 7d, a_9 = 25 + 8d, a_{10} = 25 + 9d$$

である。

$$a_9, a_{10}, a_8$$

の順で等比数列になるので

$$a_9 a_8 = a_{10}^2$$

である。

　つまり

$$(25 + 8d)(25 + 7d) = (25 + 9d)^2$$

である。

　これを解くと

$$d = -3$$

である。

　よって

$$a_n = -3n + 28 \quad (n = 1, 2, \cdots,)$$

である。

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}n\{25 + (-3n + 28)\} \\ &= \frac{1}{2}n(53 - 3n) \end{aligned}$$

である。

$$S_n < 0$$

となるのは、$53 - 3n < 0$ のときである。

　つまり

$$n > 17 + \frac{2}{3}$$

なので、求める n の値は

$$n = 18$$

である。

(2)

(i) $f(-1)=3, f(-2)=0$ なので

$$-1+a-b+c=3 \text{かつ} -8+4a-2b+c=0$$

である。

つまり

$$\begin{cases} a-b+c=4 & \cdots ① \\ 4a-2b+c=8 & \cdots ② \end{cases}$$

である。$f(-1)=3$ は極値は極値なので

$$f'(-1)=0$$

である。

ここで、任意の実数 x に対し

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$3-2a+b=0$$

つまり

$$2a-b=3 \quad \cdots ③$$

①, ②, ③ を解くと

$$a=1, b=-1, c=2$$

を得る。

(ii) $g(x)=x^3+x^2-5x+2$ とおく。

$$f(x)=4x+K \iff x^3+x^2-5x+2=K$$

なので、曲線 $y=g(x)$ が直線 $y=K$ と異なる 2 つの共有点をもつような K の条件が求める K の条件であるのでこれを調べる。

$$g'(x)=3x^2+2x-5=(3x+5)(x-1)$$

なので、g の増減表は以下のようになる。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	$-\frac{5}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	(∞)	$\nearrow$	$\frac{229}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$(-\infty)$

よって求める K の条件は

$$K=-1,\frac{229}{27}$$

である。

(3)　原点から点 (x,y) の距離の 2 乗は

$$x^2+y^2$$

であるから、これの最小値と最大値をとるときの $(x,y)\in D$ の値と原点から点 $(x,y)\in D$ の距離が最小値と最大値をとるときの $(x,y)\in D$ の値はそれぞれ一致する。

下図より、原点から直線 $3x-y=-8$ との距離がの 2 乗が求める最小値であるから、これを計算すると

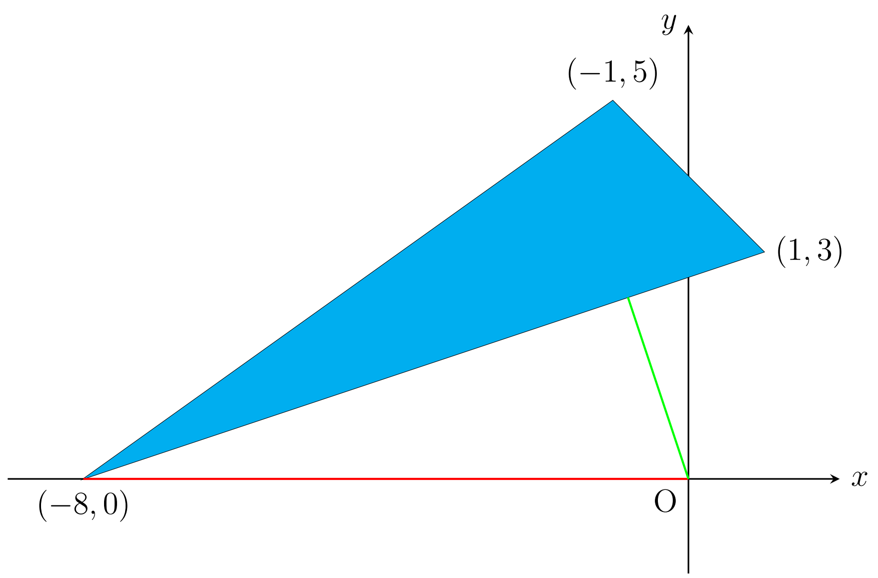
$$\left(\frac{|3\cdot 0-1\cdot 0+8|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}\right)^2=\frac{32}{5}$$

である。

下図より、x^2+y^2 が最大となるのは点 $(x,y)\in D$ は $(-8,0)$ なので

$$x^2+y^2=64$$

が求める最大値である。



(4)

(i) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{6}, \angle\mathrm{OBA} = 30^\circ$ であり点 B が y 軸上の点であることから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 3\sqrt{2}, |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 2\sqrt{6}$$

である。

正弦定理より

$$\frac{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}{\sin\angle\mathrm{BAC}} = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}{\sin\angle\mathrm{ACB}}.$$

つまり

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = 4$$

である。

(ii) $\triangle ABC$ に余弦定理を用いると

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - 2|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\angle ACB$$

である。

つまり

$$(2\sqrt{6})^2 = 4^2 + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - 2\cdot 4\cdot|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cdot\frac{1}{2}$$

である。

これから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 2 + 2\sqrt{3} \quad \cdots ①$$

である。

また、点 $\mathrm{A}(0, 0, \sqrt{6}), C(t, \frac{t}{\tan\theta}, 0)$ から

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = t^2 + \frac{t^2}{\tan^2\theta} + 6 \quad \cdots ②$$

①, ②から

$$t^2 + \frac{t^2}{\tan^2\theta} + 6 = 2 + 2\sqrt{3}$$

である。

整理すると

$$t^2 + \frac{t^2}{\tan^2\theta} = 10 + 8\sqrt{3} \quad \cdots ③$$

である。

ここで、$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = t^2 + \dfrac{t^2}{\tan^2\theta}$ なので

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = 10 + 8\sqrt{3}$$

である。

(iii)

$$t^2 + \frac{t^2}{\tan^2\theta} = \frac{t^2}{\sin^2\theta}$$

なので

$$\frac{t^2}{\sin^2\theta} = 10 + 8\sqrt{3}$$

である。

つまり

$$t^2 = (10 + 8\sqrt{3})\sin^2\theta \quad \cdots ④$$

である。

点 $\mathrm{B}(0, \pm 3\sqrt{2}, 0), C(t, \dfrac{t}{\tan\theta}, 0)$ なので

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = t^2 + \frac{t^2}{\tan^2\theta} \mp 6\sqrt{2}\frac{t}{\tan\theta}$$

である。$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = 4$ なので

$$t^2 + \frac{t^2}{\tan^2\theta} \mp 6\sqrt{2}\frac{t}{\tan\theta} = 16$$

である。③ を用いると

$$10 + 8\sqrt{3} \mp 6\sqrt{2}\frac{t}{\tan\theta} = 16$$

整理すると

$$3\sqrt{2}\frac{t}{\tan\theta} = 2(3 + 2\sqrt{3})$$

である。

両辺 2 乗して整理すると

$$3\left(\frac{t}{\tan\theta}\right)^2 = 2(\sqrt{3}+2)^2$$

である。

これに④を用いると

$$3(10+8\sqrt{3})\cos^2\theta = 2(7+4\sqrt{3})$$

つまり

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 3\cdot\frac{5+4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}$$

である。

$$\tan^2\theta = -40+24\sqrt{3}$$

である。

(5)

$$a^4-4a^2b+4b^3-b^4=p^2$$

を変形すると

$$(a^2-b^2)(a^2+b^2-4b)=p^2$$

である。

p は素数なので、求める (a,b,p) の条件は

$$\begin{cases} a^2-b^2=1 \\ a^2+b^2-4b=p^2 \end{cases} \text{または} \begin{cases} a^2-b^2=p \\ a^2+b^2-4b=p \end{cases} \text{または} \begin{cases} a^2-b^2=p^2 \\ a^2+b^2-4b=1 \end{cases} \text{または}$$

$$\begin{cases} a^2-b^2=-1 \\ a^2+b^2-4b=-p^2 \end{cases} \text{または} \begin{cases} a^2-b^2=-p \\ a^2+b^2-4b=-p \end{cases} \text{または} \begin{cases} a^2-b^2=-p^2 \\ a^2+b^2-4b=-1 \end{cases}$$

である。

これを解くと

$$(a,b,p)=(1,2,3),(3,2,5)$$

である。

(6)　データが $2n$ 個のとき中央値が C_{2n} となるには n 番目に小さいデータが $C_{2n}-\varepsilon$ で $n+1$ 番目に小さいデータが $C_{2n}+\varepsilon$ のときである。ただし、$\varepsilon \geqq 0$ は、

$$A_{2n} < C_{2n}-\varepsilon \text{と } C_{2n}+\varepsilon < B_{2n}$$

を満たすような実数である。

今この $\varepsilon \geqq 0$ を一つ固定する。

このとき、S_{2n} が最小となるのは、$1, 2, \cdots, n-1$ 番目に小さいデータが A_n であり、最大となるのは $n+1, n+2, \cdots 2n-1$ 番目に小さいデータが $C_{2n}+\varepsilon$ のときである。

つまり、このときの S_{2n} の最小値は

$$\begin{aligned}(S_{2n}\text{の最小値}) &= (n-1)A_{2n}+(C_{2n}-\varepsilon)+(n-1)(C_{2n}+\varepsilon)+B_{2n}\\ &= (n-1)A_{2n}+B_{2n}+nC_{2n}+(n-2)\varepsilon \quad \cdots ①\end{aligned}$$

また S_{2n} が最大となるのは、$2, \cdots, n$ 番目に小さいデータが $C_n-\varepsilon$ であり、最大となるのは $n+2, n+3 \cdots 2n$ 番目に小さいデータが B_{2n} のときである。

つまり、このときの S_{2n} の最大値は

$$\begin{aligned}(S_{2n}\text{の最大値}) &= A_{2n}+(n-1)(C_{2n}-\varepsilon)+(C_{2n}+\varepsilon)+(n-1)B_{2n}\\ &= A_{2n}+(n-1)B_{2n}+nC_{2n}-(n-2)\varepsilon \quad \cdots ②\end{aligned}$$

①, ② の ε を然るべき範囲で動かせば、S_{2n} の値域

$$(n-1)A_{2n}+B_{2n}+nC_{2n} \leqq S_{2n} \leqq A_{2n}+(n-1)B_{2n}+nC_{2n}$$

を得る。

(i) $21 \leqq S_{2n} \leqq 31.$

(ii) $(n-1)A_{2n}+B_{2n}+nC_{2n} \leqq S_{2n} \leqq A_{2n}+(n-1)B_{2n}+nC_{2n}.$

2.

(1)　$x^2+y^2-12y=0$ を変形すると

$$x^2+(y-6)^2=6^2$$

なので、円 $x^2+y^2-12y=0$ の半径は 6 であり $\mathrm{P}(0,6)$ である。また Q の座標は

$$\mathrm{Q}(6\sin\theta, -6\cos\theta+6)$$

である。

$\theta=0$ のとき直線 PQ の方程式は

$$x=0$$

である。以下そうでない場合を考える。

直線 PQ の方程式は

$$y=\frac{-6\cos\theta+6-6}{6\sin\theta}x+6.$$

つまり

$$y=-\frac{x}{\tan\theta}+6.$$

(2)

(i) 放物線 $y=ax^2+b$ は点 Q を通るので

$$-6\cos\theta+6=a(6\sin\theta)^2+b.$$

つまり

$$36a\sin^2\theta+b=-6\cos\theta+6 \quad \cdots ①.$$

点 Q における接線が点 Q における円 $x^2+y^2-12y=0$ の接線と一致することと、直線 PQ が点 Q における円 $x^2+y^2-12y=0$ の法線であることから

$$\frac{d}{dx}(ax^2+b)\Big|_{x=6\sin\theta}=\tan\theta.$$

つまり

$$12a\sin\theta=\tan\theta.$$

これを解くと

$$a=\frac{1}{12\cos\theta}$$

である。

これを ① に代入すると

$$36 \cdot \frac{1}{12\cos\theta} \cdot \sin^2\theta + b = -6\cos\theta + 6.$$

つまり

$$b = -6\cos\theta + 6 - \frac{3\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

$\theta = -\dfrac{\pi}{3}$ のとき、直線 PQ の方程式は

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 6$$

であり、放物線 $y = ax^2 + b$ の方程式は

$$y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{2}$$

である。

この放物線と直線 PQ の交点の x 座標は

$$\frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 6,$$

つまり

$$x^2 - 2\sqrt{3}x - 45 = 0$$

この方程式の 2 解を $\alpha, \beta\,(\alpha < \beta)$ とすると解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = 2\sqrt{3}\text{かつ}\alpha\beta = -45$$

である。

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}x + 6 - \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{2} \right) \right\} dx \\
&= \frac{1}{6} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3 \\
&= \frac{1}{36} \left\{ (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \right\}^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{36} \{ (2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot (-45) \}^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{36} (192)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{192\sqrt{192}}{36} \\
&= \frac{128}{3}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

3.

10 万の中の一人がウイルス X に罹患している事象を A、ウイルス Y に罹患している B、発熱している事象を C、腹痛を起こしている事象を D とする。

(1)　求める確率は $P(\overline{A}\cap C)$ である。

	C	$\overline{C}$
A	$\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}$
$\overline{A}$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{10}$

図から

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\cap C) &= \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{10}\\ &= \frac{2}{25}.\end{aligned}$$

(2)

	B	$\overline{B}$
A	$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}$
$\overline{A}$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}$

求める確率は

$$P(A\cap C\cap B)+P(\overline{A}\cap C\cap B)$$

である。

$$\begin{aligned}P(A\cap C\cap B)+P(\overline{A}\cap C\cap B) &= \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{4}\\ &= \frac{23}{400}.\end{aligned}$$

(3)

(i) 図から

$$\begin{aligned}P(D) &= \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{10}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\\ &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

なので、3 回の試行で選ばれた人のうち、1 人のみに腹痛がみられる確率は

$${}_3\mathrm{C}_1 P(D)(1-P(D))^2 = \frac{225}{512}$$

である。

	D	$\overline{D}$
B	$\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{10}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10}$
$\overline{B}$	$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}$

(ii) 3 回の試行で選ばれた人のうち、1 人のみに腹痛がみられる事象を E とし、3 回の試行その中に一人も Y に罹患していない事象を F とする。

$$P(E\cap F) = {}_3\mathrm{C}_1\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\right)^2$$

であり、求める確率は $P_E(\overline{F})$ である。

$$\begin{aligned}P_E(\overline{F}) &= \frac{P(E\cap\overline{F})}{P(E)}\\ &= \frac{P(E)-P(E\cap F)}{P(E)}\\ &= \frac{1973}{3125}.\end{aligned}$$