1.

(1)　4個のさいころを同時に投げるとき、出た目の積が偶数になる確率は $\boxed{\text{ア}}$ であり、出た目の積が4の倍数になる確率は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2)　$0 \leqq x < \pi$ のとき、方程式 $\cos 3x + \cos x = 0$ の解は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(3)　不等式 $(\log_4 x)^2 - \log_8 x^2 + \dfrac{1}{3} < 0$ を解くと $\boxed{\text{エ}}$ である。

(4)　$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 11 = 0$ を C とするとき、円 C の中心の座標は $\boxed{\text{オ}}$ であり、半径は $\boxed{\text{カ}}$ である。また、この円 C には点 $\mathrm{P}(3, 2)$ から2本の接線を引くことができるが、その接点の1つを A とする。このとき、AP の長さは $\mathrm{AP} = \boxed{\text{キ}}$ である。

(1)　出た目が全て奇数となる場合の余事象を考えて

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{16} \quad \cdots (ア)$$

出た目の積が偶数になる場合のうち4の倍数にならないのは、奇数が3個, 残り1個の目が2か6のときで, その確率は,

$$_4C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

よって, 求める確率は,

$$\frac{15}{16} - \frac{1}{6} = \frac{37}{48} \quad \cdots (イ)$$

(2)

$$\begin{aligned} \cos 3x + \cos x &= 4\cos^3 x - 3\cos x + \cos x \\ &= 4\cos x\left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \cos 3x + \cos x = 0 &\iff \cos x = 0 \text{ または } \cos^2 x - \frac{1}{2} = 0 \\ &\iff \cos x = 0,\ \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\iff x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \quad \cdots (ウ) \end{aligned}$$

<別解>

$$\begin{aligned} \cos 3x + \cos x &= 2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} \\ &= 2\cos 2x \cos x \end{aligned}$$

と計算することもできる.

(3)　真数条件より $x > 0$

底を2にそろえる.

$$\begin{aligned} (\log_4 x)^2 - \log_8 x^2 + \frac{1}{3} &< 0 \\ \left(\frac{\log_2 x}{\log_2 4}\right)^2 - \frac{\log_2 x^2}{\log_2 8} + \frac{1}{3} &< 0 \\ \frac{1}{4}(\log_2 x)^2 - \frac{2}{3}\log_2 x + \frac{1}{3} &< 0 \\ (\log_2 x - 2)\left(\log_2 x - \frac{2}{3}\right) &< 0 \\ \frac{2}{3} < \log_2 x &< 2 \end{aligned}$$

底 > 1 より

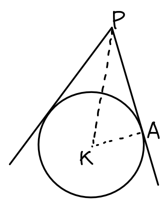
$$2^{\frac{2}{3}} < x < 4 \quad \cdots (エ)$$

($x > 0$ をみたす)

(4)　$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 18$

中心 $(2, -5)$　$\cdots$(オ)

半径 $3\sqrt{2}$　$\cdots$(カ)



$$\mathrm{PK}^2 = (3-2)^2 + (2-(-5))^2 = 50$$

$$\mathrm{KA}^2 = 18$$

より, 三平方の定理から

$$\mathrm{AP}^2 = 50 - 18 = 32$$

$$\therefore\ \mathrm{AP} = 4\sqrt{2} \quad \cdots (キ)$$

2.

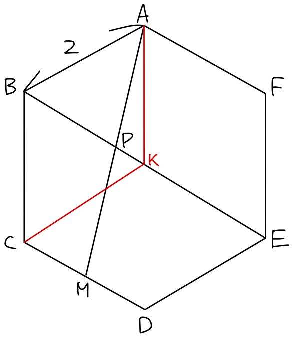
(1)　一辺の長さが 2 の正六角形 ABCDEF において、辺 CD の中点 M とし、直線 BE と直線 AM の交点 P とする。このとき、$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \boxed{\text{ク}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \boxed{\text{ケ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \boxed{\text{コ}}$ である。また、$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}}$ の値は $\boxed{\text{サ}}$ である。

(2)　m を実数とする。x の 2 次方程式

$$x^2 + mx + m + 3 = 0$$

が異なる 2 つの虚数解をもつような m の値の範囲は $\boxed{\text{シ}}$ であり、異なる正の解をもつような m の値の範囲は $\boxed{\text{ス}}$ である。

(3)　$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明を解答欄 (3) に記述しなさい。



(1)　$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BK}$ であることに注目して

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} \qquad \cdots (ク)$$

また,

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}$$
$$= 2\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AF} \qquad \cdots (ケ)$$

(2) [$\overrightarrow{AP}$ を2通りで表す]

実数 p を用いて

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + 2p\overrightarrow{AF}$$

と表すことができる. 一方で, 実数 q を用いて

$$\overrightarrow{AP} = q\overrightarrow{AM} = 2q\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}q\overrightarrow{AF}$$

と表すことができる. これらが一致することより

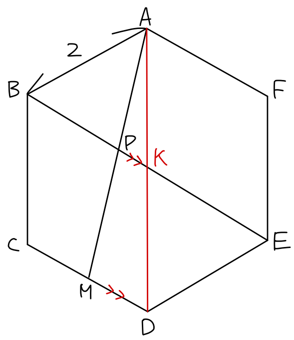
$$q = \frac{1}{2} \qquad \therefore\ p = \frac{3}{8}$$

よって, $\overrightarrow{BP} = 2p\overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AF} \qquad \cdots (コ)$

〈別解〉

PK // MD に注目して, 中点連結定理から

ただちに $|\overrightarrow{PK}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{MD}|$ と分かる.



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AF}| \cos 120^\circ = -2$$
$$|\overrightarrow{AF}|^2 = 4$$

であることより,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BP} = \left(2\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AF}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AF}\right)$$
$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} + \frac{9}{8}|\overrightarrow{AF}|^2$$
$$= -3 + \frac{9}{2} = \frac{3}{2} \qquad \cdots (サ)$$

2.

(1)　一辺の長さが2の正六角形ABCDEFにおいて、辺CDの中点Mとし、直線BEと直線AMの交点Pとする。このとき、$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \boxed{\text{ク}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \boxed{\text{ケ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \boxed{\text{コ}}$である。また、$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$と$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$の内積$\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}}$の値は$\boxed{\text{サ}}$である。

(2)　mを実数とする。xの2次方程式

$$x^2 + mx + m + 3 = 0$$

が異なる2つの虚数解をもつようなmの値の範囲は$\boxed{\text{シ}}$であり、異なる正の解をもつようなmの値の範囲は$\boxed{\text{ス}}$である。

(3)　$\sqrt{2}$が無理数であることの証明を解答欄(3)に記述しなさい。

(2)　$f(x) = x^2 + mx + m + 3$ とおき,

$f(x) = 0$　…(＊) の判別式をDとおく.

(＊)が2つの虚数解をもつ

$\iff D < 0$

$\iff m^2 - 4m - 12 < 0$

$\iff (m+2)(m-6) < 0$

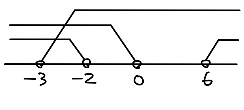
$\iff -2 < m < 6$　　…(シ)

(＊)が異なる2つの正の解をもつ

$\iff \begin{cases} D > 0 \\ \text{軸} > 0 \\ f(0) > 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} m < -2,\ 6 < m \\ -\frac{m}{2} > 0 \\ m + 3 > 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} m < -2,\ 6 < m \\ m < 0 \\ m > -3 \end{cases}$



$\iff -3 < m < -2$　　…(ス)

(3)　$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると, 互いに素な自然数 p, q を用いて,

$$\sqrt{2} = \frac{q}{p}$$

と表すことができる. 両辺二乗して整理して

$$2p^2 = q^2$$

となり, 左辺は2の倍数ゆえ q も2の倍数であり, 自然数 q' を用いて $q = 2q'$ とおける. このとき,

$$2p^2 = (2q')^2$$
$$p^2 = 2q'^2$$

となり, 右辺は2の倍数ゆえ p も2の倍数となるが, これは p, q が互いに素であることに矛盾する.

よって $\sqrt{2}$ を有理数とする仮定は誤りで, $\sqrt{2}$ は無理数である. □

3.
数列

$$\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{0}{2},\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{0}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},\frac{0}{4},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4},\frac{0}{5},\cdots\cdots$$

の第 n 項を a_n とする。

(1)　約分することで $a_n=1$ を満たす自然数 n のうち k 番目に小さいものを N_k で表す。例えば、$N_1=2, N_2=5$ である。このとき、自然数 k に対して、N_k を k を用いて表すと $\boxed{\text{セ}}$ である。また自然数 k に対して、数列 $\{a\}_n$ の初項から第 N_k 項までの和を k を用いて表すと $\boxed{\text{ソ}}$ である。

(2)　約分することで $a_n=\dfrac{1}{4}$ を満たす自然数 n の内、k 番目に小さいものを M_k で表す。例えば、$M_1=11, M_2=\boxed{\text{タ}}$ である。このとき、自然数 k に対して、M_k を k を用いて表すと $M_k=\boxed{\text{チ}}$ である。

(3)　a_{200} を約分した形で表すと $\boxed{\text{ツ}}$ である。また、数列 $\{a_n\}$ の初項から第 200 項までの和は $\boxed{\text{テ}}$ である。

(1)　$N_k=\sum_{\ell=1}^{k}(\ell+1)=\frac{1}{2}k(k+3)$　…(セ)

〈検算〉 $k=1$　$\frac{1}{2}\cdot1\cdot4=2$

$k=2$　$\frac{1}{2}\cdot2\cdot5=5$　O.K.

第 ℓ 群の和は $\dfrac{0+1+\cdots+\ell}{\ell}=\frac{1}{2}(\ell+1)$

$a_1+a_2+\cdots+a_{N_k}$

$=$(第1群の和)$+\cdots+$(第 k 群の和)

$=\sum_{\ell=1}^{k}\frac{1}{2}(\ell+1)$

$=\frac{1}{4}k(k+3)$　…(ソ)

〈検算〉

$k=1$　$\frac{1}{4}\cdot1\cdot4=1$　$\frac{0}{1}+\frac{1}{1}=1$

$k=2$　$\frac{1}{4}\cdot2\cdot5=\frac{5}{2}$　$\frac{0}{1}+\frac{1}{1}+\frac{0}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}=\frac{5}{2}$　O.K.

(2)　M_2 の分母は 4×2 ゆえ, $a_{M_2}=\dfrac{2}{4\times2}$. よって M_2 は第8群の3項目. したがって,

$M_2=2+3+4+5+6+7+8+3=38$　…(タ)

M_k の分母は $4\times k$ ゆえ, $a_{M_k}=\dfrac{k}{4\times k}$. よって M_k は第 $4k$ 群の $k+1$ 番目. よって,

$M_k=\sum_{\ell=1}^{4k-1}(\ell+1)+k+1$

$=\frac{1}{2}(4k-1)\cdot4k+4k-1+k+1$

$=8k^2+3k$　…(チ)

〈検算〉 $M_1=8\cdot1+3\cdot1=11$

$M_2=8\cdot4+3\cdot2=38$　O.K.

(3)　$\underset{\substack{\parallel\\189}}{\frac{1}{2}\cdot18\cdot21}<200<\underset{\substack{\parallel\\209}}{\frac{1}{2}\cdot19\cdot22}$

より, a_{200} は第19群の11番目. よって,

$a_{200}=\dfrac{10}{19}$　…(ツ)

$a_1+\cdots+a_{200}$

$=$(第1群の和)$+\cdots+$(第18群の和)$+\dfrac{0+1+\cdots+10}{19}$

$=\frac{1}{4}\cdot18\cdot(18+3)+\frac{55}{19}$

$=\frac{189}{2}+\frac{55}{19}=\frac{3701}{38}$　…(テ)

4.

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^2(x-3)$$

で定める。以下に答えなさい。

(1)　関数 $f(x)$ は $x =$ $\boxed{\text{ト}}$ で極小値 $\boxed{\text{ナ}}$ をとる。

(2)　曲線 $y = f(x)$ を C とする。点 A$(0,1)$ から曲線 C へは 2 本の接線が引ける。そのうち、傾きが正の接線を l とし、傾きが負の接線を m とするとき、直線 l の方程式は $y =$ $\boxed{\text{ニ}}$ であり、直線 m の方程式は $y =$ $\boxed{\text{ヌ}}$ である。

(3)　曲線 C と直線 l の接点 P の x 座標は $\boxed{\text{ネ}}$ である。また、曲線 C と直線 l は 2 つの共有点をもつが点 P とは異なる共有点 Q の x 座標は $\boxed{\text{ノ}}$ である。さらに曲線 C と直線 l で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{ハ}}$ である。

(1)　$f(x) = x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 3x(x-2)$

x		0		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$f(x)$ は $x=2$ で極小値 $f(2) = -4$ をとる。…(ト)(ナ)

(2)　[接線の問題は接点をおくのが基本]

$y=f(x)$ の $x=t$ における接線の式は

$$y - f(t) = f'(t)(x-t)$$

すなわち

$$y = 3t(t-2)(x-t) + t^2(t-3)$$

これが A$(0,1)$ を通るとき

$$1 = 3t(t-2)(-t) + t^2(t-3)$$

$$2t^3 - 3t^2 + 1 = 0$$

$$(t-1)^2(2t+1) = 0$$

l の方程式は $t = -\frac{1}{2}$ のときのもので、

$$y = -\frac{3}{2}\left(-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{7}{2}\right)$$

$$= \frac{15}{4}x + 1$$

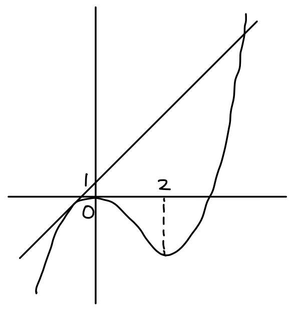
〈注〉y 切片は 1 になるはずなので x の係数だけ計算すればよい。

m の方程式は $t=1$ のときのもので、

$$y = 3\cdot(-1)(x-1) + 1\cdot(-2)$$

$$= -3x + 1$$

(3)



l と $f(x)$ の接点は $t = -\frac{1}{2}$ であったので、

$x = -\frac{1}{2}$ …(ネ)

l と $f(x)$ の共有点は、以下の連立方程式の解である。

$$\begin{cases} y = \frac{15}{4}x + 1 \\ y = x^2(x-3) \end{cases}$$

$$x^3 - 3x - \frac{15}{4}x - 1 = 0$$

[2の方程式は $x = -\frac{1}{2}$ を重解にもつ]

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2(x-4) = 0$$

よって共有点 Q の x 座標は

$x = 4$ …(ノ)

C と l で囲まれた図形の面積は、

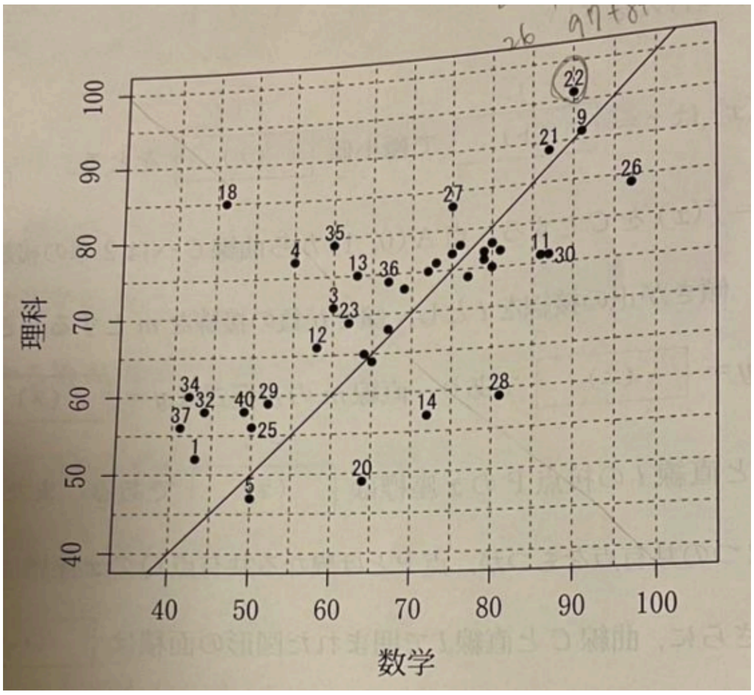
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4} \left(\frac{15}{4}x + 1 - x^2(x-3)\right) dx$$

$$= \frac{|-1|}{12}\left(4 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^4$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{9}{2}\right)^4 = \frac{2187}{64}$$

5.

下図は、あるクラスの 40 人の生徒の数学と理科の試験得点の散布図である。データの点の近くの数値はそのデータ点の生徒の出席番号である。



(1)　数学と理科の合計得点が最も高い生徒の出席番号は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。また数学と理科の得点差の絶対値が最も大きい生徒の出席番号は $\boxed{\text{フ}}$ である。

(2)　数学と理科のそれぞれの得点の平均値 $\overline{x}, \overline{y}$,　標準偏差を s_x, s_y, 数学と理科の得点の共分散を s_{xy} と表すと、これらの数値は以下であった

$$\overline{x} = 67.7, \overline{y} = 70.9, s_x = 14.9, s_y = 11.5, s_{xy} = 115.7$$

数学の得点と理科の得点の相関係数は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。なお、答えは小数第 3 位は四捨五入し、少数第 2 位まで求めなさい。

(3)　各生徒の得点を $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{40}$, 理科の得点を $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_{40}$ で表す。数学と理科の合計得点 $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots\cdots, x_{40} + y_{40}$ の平均値は、$\overline{x}, \overline{y}$ を用いると $\boxed{\text{ホ}}$ と表せる。合計得点の分散は

$$\frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40}(x_i + y_i - \boxed{\text{ホ}})^2$$

であるから、これを式変形すると、合計得点の分散は、s_x, s_y, s_{xy} を用いて $\boxed{\text{マ}}$ と表せる。これらの式に (2) で与えられた数値を入れて計算すると、数学と理科の合計得点の平均値は $\boxed{\text{ミ}}$, 分散は $\boxed{\text{ム}}$ である。なお答えは小数第 2 位を四捨五入し、小数第 1 位まで求めなさい。

(1) 数学の点数をx, 理科の点数をyとする.

$x+y=k$ の直線がどの点を通るときにkが最大となるかを考えて, (ヒ) 22

$y=x$ の直線から最も離れた点を考えて, (フ) 18

(2)
$$\frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{115.7}{14.9\times 11.5}$$
$$= 0.675\cdots \fallingdotseq 0.68 \quad \cdots(\text{ヘ})$$

(3)
$$\frac{1}{40}\{(x_1+y_1)+\cdots+(x_{40}+y_{40})\}$$
$$= \frac{1}{40}(x_1+\cdots+x_{40}) + \frac{1}{40}(y_1+\cdots+y_{40})$$
$$= \overline{x} + \overline{y} \quad \cdots(\text{ホ})$$

［(分散) $= \overline{x^2} - (\overline{x})^2$ であることを導くときと同様に, Σの中身を展開し, 定数である$\overline{x}$や$\overline{y}$をΣの外に出して計算するとよい.］

$$\frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40}\{(x_i+y_i)-(\overline{x}+\overline{y})\}^2$$
$$= \frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40}\{x_i^2+2x_iy_i+y_i^2-2(x_i+y_i)(\overline{x}+\overline{y})+(\overline{x})^2+2\overline{x}\overline{y}+(\overline{y})^2\}$$
$$= \overline{x^2}+2\cdot\frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40}x_iy_i+\overline{y^2}-2(\overline{x}+\overline{y})\underbrace{\frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40}(x_i+y_i)}_{=\overline{x}+\overline{y}}+(\overline{x})^2+2\overline{x}\overline{y}+(\overline{y})^2\}$$
$$= \overline{x^2}+2\cdot\frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40}x_iy_i+\overline{y^2}-2(\overline{x})^2-4\overline{x}\overline{y}-2(\overline{y})^2+(\overline{x})^2+2\overline{x}\overline{y}+(\overline{y})^2\}$$
$$= \overline{x^2}-(\overline{x})^2+\overline{y^2}-(\overline{y})^2+2\{\underbrace{\frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40}(x_iy_i-\overline{x}\overline{y})}\}$$
$$= \frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40}\{(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})+\overline{x}y_i+\overline{y}x_i-2\overline{x}\overline{y}\}$$
$$= S_{xy}+\overline{x}\overline{y}+\overline{y}\overline{x}-2\overline{x}\overline{y}$$
$$= S_x^2+S_y^2+2S_{xy} \quad \cdots(\text{マ})$$

(ミ) $67.7+70.6 = 138.6$

(ム) $14.9^2+11.5^2+2\times 115.7$
$$= 222.01+132.25+231.4$$
$$= 585.66 \fallingdotseq 585.7$$