1 (1)　m, n が $x^2-(p-9)x-p+1=0$ の解なので解と係数の関係から

$$m+n=p-9 \text{ かつ } mn=-p+1$$

であるから

$$mn+m+n=-8.$$

また、この式を変形すると

$$(m+1)(n+1)=-7$$

である。これと整数 m, n が $m<0<n$ を満たすことから

$$m+1=-1 \text{ かつ } n+1=7$$

なので、これを解くと

$$(m, n)=(-2, 6).$$

である。、これを $m+n=p-9$ に用いると

$$p=13$$

を得る。

(2)　$x=\tan\theta$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2+1}&=\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\\&=\sin\theta\cos\theta\\&=\frac{1}{2}\sin 2\theta.\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+1}&=\cos^2\theta\\&=\frac{1}{2}(\cos 2\theta+1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y&=1+3\cdot\frac{x}{x^2+1}+4\cdot\frac{1}{x^2+1}\\&=1+\frac{3}{2}\sin 2\theta+4\cdot\frac{1}{2}(\cos 2\theta+1)\\&=\frac{3}{2}\sin 2\theta+2\cos 2\theta+3\\&=\frac{5}{2}\sin(2\theta+\alpha)+3.\end{aligned}$$

ただし、実数 α は

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{4}{5}$$

を満たす。

また、$|x| \leqq 1$ を動くとき θ の動く範囲は

$$|\theta| < \frac{\pi}{2}$$

である。

θ がこの範囲を動くとき、$\sin(2\theta + \alpha)$ の動く範囲は

$$-\frac{3}{5} \leqq \sin(2\theta + \alpha) \leqq 1$$

であるから、関数 y のとりうる値の範囲は

$$\frac{3}{2} \leqq y \leqq \frac{11}{2}$$

よって、y の最大値と最小値はそれぞれ

$$\frac{11}{2}, \frac{3}{2}$$

である。

2

A, B, C がカードを引く確率はそれぞれ

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$$

である。

(1)　B の得点が 3 の倍数となるのは

- B がカードを引かない
- B がカードを引き、そのカードが 3, 6, 9

の 2 つの排反な事象の和事象である。これらの 2 つの排反な事象の確率はそれぞれ

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{9}$$

なので、求める確率は

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{9}.$$

(2)　2 回の試行で一人だけ 0 点であるのは

- A だけ 0 点
- B だけ 0 点
- C だけ 0 点

の 3 つの排反な事象の和事象である。これら 3 つの排反な事象の確率はそれぞれ

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2!, \quad \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2!, \quad \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2!$$

なので、求める確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2! + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2! + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2! = \frac{11}{18}.$$

(3)　2 回の試行で A の得点が 5 以上になるのは

- A が 1 回だけカードを引き、その番号が 5 以上である
- A が 2 回引き、2 枚のカードの番号の和が 5 以上である

の 2 つの排反な事象の和事象である。
　まず、事象「A が 1 回だけカードを引き、その番号が 5 以上である」が起こる確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{9}\cdot 2!$$

である。
　次に、事象「A が 2 回引き、2 枚のカードの番号の和が 5 以上である」が起こる確率を求める。
　2 枚のカードを取り出した順番まで考えた選び方は

$$72\text{ 通り}$$

である。
　また「2 枚のカードの番号の和が 4 以下である」のは

$$(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)$$

の 4 通りなので、「A が 2 回引き、2 枚のカードの番号の和が 4 以下である」確率は

$$\frac{4}{72}$$

　よって、事象「A が 2 回引き、2 枚のカードの番号の和が 5 以上である」が起こる確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(1-\frac{4}{72}\right)$$

である。
　以上から、求める確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot 2!+\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(1-\frac{4}{72}\right)=\frac{13}{72}$$

　(4)　「2 回目までに A の得点が 5 以上」であり、3 回目までに A の得点が 5 以上かつ B の得点が 5 以上かつ C の得点が 5 以上である」ためには A,B,C の全員が 5 以上のカードを一回引き、A が 2 回目までにカードを引けばよい。
　A が 2 回目までにカードを引くのは

- A が 1 回目にカードを引き、B,C のどちらかが 2 回目にカードを引く
- A が 2 回目に初めてカードを引く

のいづれかである。

　つまり、ABC, ACB, BAC, CAB の 4 通りであるから、事象「2 回目までに A の得点が 5 以上」であり、3 回目までに A の得点が 5 以上かつ B の得点が 5 以上かつ C の得点が 5 以上である」が起こる確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}\cdot = 4 = \frac{5}{378}$$

である。

　よって、求める確率は

$$\frac{\frac{5}{378}}{\frac{13}{72}} = \frac{20}{273}.$$

[3] 実数 a に対して $f(a)=\frac{1}{2}(2^a-2^{-a})$ とおく．また，$A=2^a$ とする．

(1) 等式 $\left(A-\frac{1}{A}\right)^3=\boxed{(40)}\left(A^3-\frac{1}{A^3}\right)-\boxed{(41)}\left(A-\frac{1}{A}\right)$ より，実数 a に対して

$$\{f(a)\}^3=\frac{\boxed{(42)}}{\boxed{(43)}}f(3a)-\frac{\boxed{(44)}}{\boxed{(45)}}f(a) \quad \cdots\cdots \quad ①$$

が成り立つ．

(2) 実数 a,b に対して $f(a)=b$ が成り立つならば，$A=2^a$ は2次方程式

$$A^2-\boxed{(46)}bA-\boxed{(47)}=0$$

$\frac{1}{2}(A-\frac{1}{A})=b$

を満たす．$2^a>0$ より，a は b を用いて

$$a=\log_2\left(\boxed{(48)}b+\sqrt{b^2+\boxed{(49)}}\right) \quad \cdots\cdots \quad ②$$

$A-\frac{1}{A}=b$

と表せる．つまり，任意の実数 b に対して $f(a)=b$ となる実数 a が，ただ1つ定まる．

$A^2-1=Ab$

$A^2-Ab-1=0$

以下，数列 $\{a_n\}$ に対して $f(a_n)=b_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ で定まる数列 $\{b_n\}$ が，関係式

$$4b_{n+1}^3+3b_{n+1}-b_n=0 \quad (n=1,2,3,\ldots) \quad \cdots\cdots \quad ③$$

を満たすとする．

(3) ①と③から $f\left(\boxed{(50)}a_{n+1}\right)=f(a_n)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ となるので，(2) より，$a_n=\frac{a_1}{\boxed{(51)}^{n-p}}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ が得られる．ここで，$p=\boxed{(52)}$ である．

(4) $n\geqq 2$ に対して，$S_n=\sum_{k=2}^{n}3^{k-1}b_k^3$ とおく．$c_n=3^nb_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ で定まる数列 $\{c_n\}$ の階差数列を用いると，③より，

$$S_n=\frac{\boxed{(53)}}{\boxed{(54)}}b_1-\frac{\boxed{(55)}^n}{\boxed{(56)}}b_n \quad (n=2,3,4,\ldots)$$

となる．ゆえに，$b_1=\frac{4}{3}S_5-108$ が成り立つならば，

$$a_1=\boxed{(57)}\boxed{(58)}\boxed{(59)}\log_2\boxed{(60)}$$

である．

(1) $(A-\frac{1}{A})^3=(A^3-\frac{1}{A^3})-3(A-\frac{1}{A})$

$\{2f(a)\}^3=2f(3a)-3\cdot 2f(a)$

$f(a)^3=\frac{1}{4}f(3a)-\frac{3}{4}f(a)$

(40)(41)：1 3

(42)(43)：1 4

(44)(45)：3 4

(2) $f(a)=b \Leftrightarrow A^2-2bA-1=0 \Leftrightarrow A=b+\sqrt{b^2+1}$

$\Leftrightarrow a=\log_2(b+\sqrt{b^2+1})$

(46)(47)：2 1

(48)(49)：1 1

(3) ①で $a=a_{n+1}$ として，$4b_{n+1}^3+3b_{n+1}-f(3a_{n+1})=0$

これと③から，$f(3a_{n+1})=b_n=f(a_n)$ であり，

f は単調増加なので $3a_{n+1}=a_n$，$a_n=\frac{a_1}{3^{n-1}}$

(50)：3

(51)(52)：3 1

(4) $c_k-c_{k-1}=3^{k-1}(3b_k-b_{k-1})=(-4)\cdot 3^{k-1}\cdot b_k^3$ より，

$S_n=\sum_{k=2}^{n}3^{k-1}\cdot b_k^3=\frac{1}{-4}\sum_{k=2}^{n}(c_k-c_{k-1})=\frac{1}{4}(c_1-c_n)=\frac{3}{4}b_1-\frac{3^n}{4}b_n$

(53)(54)：3 4

(55)(56)：3 4

$b_1=\frac{4}{3}S_5-108 \Leftrightarrow b_5=-\frac{4}{3}$　また，$a_5=\frac{a_1}{81}$ で，

$a_5=\log_2(b_5+\sqrt{b_5^2+1})=-\log_2 3$ より $a_1=-81\log_2 3$

(57)(58)(59)：− 8 1

(60)：3

[4] $p,\ q$ を正の実数とし，O を原点とする座標空間内に 3 点 A $(3, -\sqrt{3}, 0)$, B $(3, \sqrt{3}, 0)$, C $(p, 0, q)$ をとる．ただし，四面体 OABC は 1 辺の長さが $2\sqrt{3}$ の正四面体であるとする．

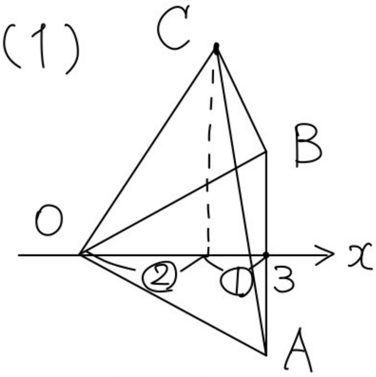
(1) p および q の値を求めよ．

以下，点 $\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{q}{2}\right)$ に関して O, A, B, C と対称な点を，それぞれ D, E, F, G とする．

(2) 直線 DG と平面 ABC の交点 H の座標を求めよ．

(3) 直線 CB と平面 DEG の交点を I，直線 CA と平面 DFG の交点を J とする．四角形 CJHI の面積 S と四角錐 G-CJHI の体積 V を，それぞれ求めよ．

(1)



正四面体の性質から，$p = \underline{2}$
$OC = \sqrt{4+q^2} = 2\sqrt{3}$ と $q>0$ より，$q = \underline{2\sqrt{2}}$

(2) まず $D(3, 0, 2\sqrt{2})$, $E(0, \sqrt{3}, 2\sqrt{2})$, $F(0, -\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$, $G(1, 0, 0)$ である．

直線GD上の点は実数kを用いて，$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k+1\\0\\k\sqrt{2}\end{pmatrix}$ と表せ，

平面ABC上の点は実数s, tを用いて，$\begin{pmatrix}2\\0\\2\sqrt{2}\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\\-2\sqrt{2}\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\-2\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s+t+2\\(t-s)\sqrt{3}\\2(1-s-t)\sqrt{2}\end{pmatrix}$ と

表せて，これらの交点がHである．これを解くと，$k=\frac{4}{3}$, $s=t=\frac{1}{6}$ となり，$\underline{H\left(\frac{7}{3}, 0, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)}$

(3) 上と同様の計算を行うことで，$I\left(\frac{13}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{5\sqrt{2}}{3}\right)$ が分かり，対称性から $J\left(\frac{13}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{5\sqrt{2}}{3}\right)$.

ここで，$\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ とおくと，

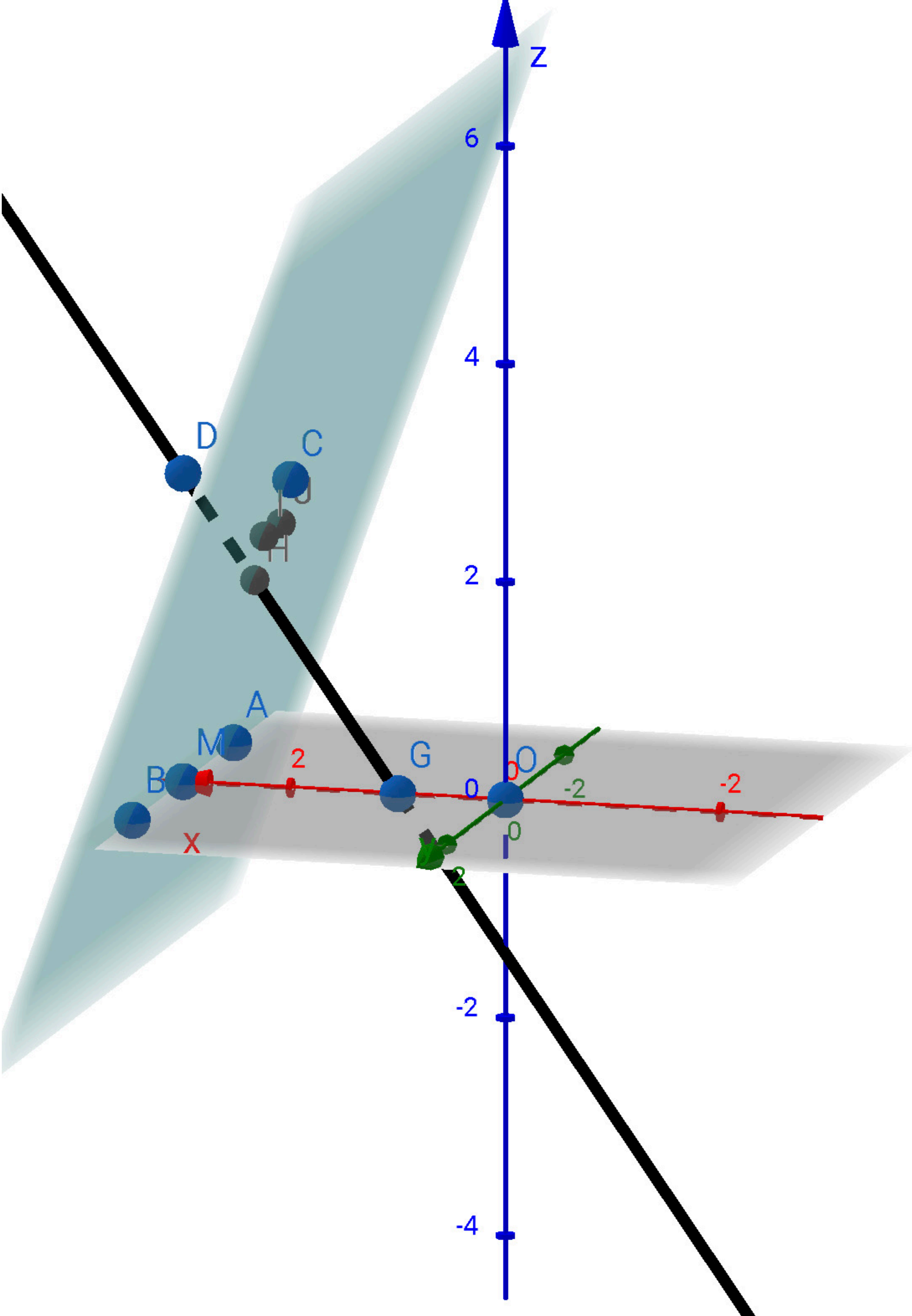
$\overrightarrow{CJ} = \left(\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{6}(1, -\sqrt{3}, -2\sqrt{2}) = \frac{1}{6}\vec{a}$, $\overrightarrow{CI} = \left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{6}(1, \sqrt{3}, -2\sqrt{2}) = \frac{1}{6}\vec{b}$,

$\overrightarrow{CH} = \left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{6}(1, -\sqrt{3}, -2\sqrt{2}) + \frac{1}{6}(1, \sqrt{3}, -2\sqrt{2}) = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$ なので，

$S = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot 2|\triangle ABC| = \frac{1}{18} \cdot 3\sqrt{3} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{6}}$ さらに，辺ABの中点をMとする．

正四面体OABCの体積をV'とすると，$V' = \frac{\sqrt{2}}{12}(2\sqrt{3})^3 = 2\sqrt{6}$ であり，

$V = V' \times \frac{1}{18} \times \frac{MG}{MO} = 2\sqrt{6} \times \frac{1}{18} \times \frac{2}{3} = \underline{\frac{2\sqrt{6}}{27}}$


z
6
4
2
D
C
H
A
M
B
G
O
x
0
-2
-2
-4

[5] xを正の実数とする．mとnは，それぞれ$m \leqq \log_4 \dfrac{x}{8}$，$n \leqq \log_2 \dfrac{8}{x}$を満たす最大の整数とし，さらに，$\alpha = \log_4 \dfrac{x}{8} - m$，$\beta = \log_2 \dfrac{8}{x} - n$とおく．

(1) $\log_2 x$を，mとαを用いて表せ．

(2) $2\alpha + \beta$の取りうる値をすべて求めよ．

(3) $n = m - 1$のとき，mとnの値を求めよ．

(4) $n = m - 1$となるためにxが満たすべき必要十分条件を求めよ．

(1) $\log_4 \dfrac{x}{8} = \dfrac{\log_2\left(\frac{x}{8}\right)}{\log_2 4} = \dfrac{1}{2}(\log_2 x - 3)$ より，$\log_2 x = 2\log_4 \dfrac{x}{8} + 3 = \underline{2m + 2\alpha + 3}$ //

(2) まず，定義から $0 \leqq 2\alpha + \beta < 2 \cdot 1 + 1 = 3$ であり，

$2\alpha + \beta = (\log_2 x - 2m - 3) + (3 - \log_2 x - n) = -2m - n$ だから，

$2\alpha + \beta$は整数である． $\therefore 2\alpha + \beta = 0, 1, 2$ に限られる．

また，$x = 2$のとき$2\alpha + \beta = 0$，$x = 3$のとき$2\alpha + \beta = 1$

$x = 5$のとき$2\alpha + \beta = 2$となるから，$2\alpha + \beta$の取りうる値は $\underline{0, 1, 2}$ //

(3) $n = m - 1$のとき，$2\alpha + \beta = -3m + 1$ であるから，$2\alpha + \beta \equiv 1 \pmod 3$

ここで(2)より$2\alpha + \beta = 0, 1, 2$であるので，このとき$2\alpha + \beta = 1$に

限られ，このとき$(m, n) = (0, -1)$となる．以下，このようになるxの

存在性について，

$$\begin{cases} 0 \leqq \log_4 \dfrac{x}{8} < 1 \\ -1 \leqq \log_2 \dfrac{8}{x} < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8 \leqq x < 32 \\ 8 < x \leqq 16 \end{cases} \iff 8 < x \leqq 16$$ を満たすxが

存在すればよく，これは存在するので $\underline{(m, n) = (0, -1)}$ //

(4) (3)の議論より，$\underline{8 < x \leqq 16}$ //

6.
(1)　任意の x に対し

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

である。
点 $p, -4p$ で極値をとるから、$x = p, -4p$ は方程式 $f(x) = 0$ の解である。
解と係数の関係から

$$p + (-4p) = -\frac{2a}{3} \text{かつ}\ p \cdot (-4p) = \frac{b}{3}$$

である。
つまり

$$a = \frac{9}{2}p \text{ かつ } b = -12p^2$$

である。
このことから

$$f(x) = x^3 + \frac{9}{2}px^2 - 12p^2x + 17$$

である。
$f(-2p) = -17$ なので

$$-8p^3 + \frac{9}{2}p(-2p)^2 - 12p \cdot (-2p) + 17 = -17$$

である。
これを解くと

$$p = -1$$

である。
これを

$$a = \frac{9}{2}p \text{ かつ } b = -12p^2$$

に代入すると

$$(a, b) = \left(-\frac{9}{2}, -12\right)$$

である。
よって

$$f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 12x + 17$$

である。

$$\begin{aligned} M &= f(p) \\ &= f(-1) \\ &= (-1)^3 - \frac{9}{2}\cdot(-1)^2 - 12\cdot(-1) + 17 \\ &= \frac{47}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= f(-4p) \\ &= f(4) \\ &= 4^3 - \frac{9}{2}\cdot 4^2 - 12\cdot 4 + 17 \\ &= -39 \end{aligned}$$

(2)　関数 f の増減表は (1) から

x	$(-\infty)$	$\cdots$	-1	$\cdots$	4	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	(∞)

また

$$f(-2) = -17$$

であり

$$\begin{aligned} f(5) &= 5^3 - \frac{9}{2}\cdot 5^2 - 12\cdot 5 + 17 \\ &= -\frac{61}{2} \end{aligned}$$

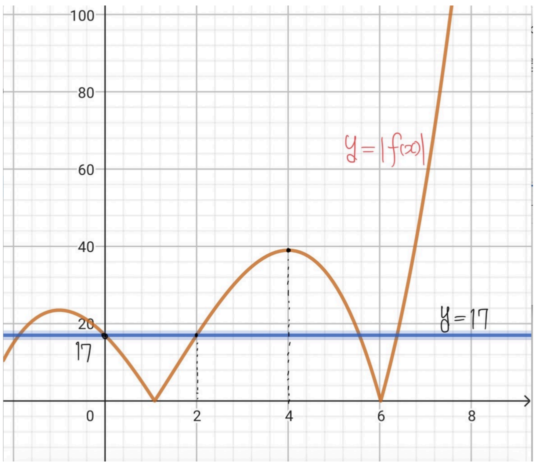
である。
よって、

$$g(t) = \begin{cases} 17 \quad (0 \leqq t \leqq 2) \\ -t^3 + \dfrac{9}{2}t^2 + 12t - 17 \quad (2 \leqq t \leqq 4) \\ = 39 \quad (4 \leqq t \leqq 5) \end{cases}$$

(3)

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^5 g(t)dt \\
&= \int_0^2 g(t)dt + \int_2^4 g(t)dt + \int_4^5 g(t)dt \\
&= \int_0^2 17dt - \int_2^4 \left(t^3 - \frac{9}{2}t^2 - 12t + 17\right) dt + \int_4^5 39dt \\
&= 34 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^3 - 6x^2 + 17x\right]_2^4 + 39 \\
&= 135.
\end{aligned}
$$

参考　$y = g(t)$ のグラフと直線 $y = 17$ の位置関係は以下のようになる。



$y = g(t)$ のグラフと直線 $y = 17$ の位置関係