I. 以下の問いに答えなさい。

(i) 式 $3(x+5)^{-\frac{5}{2}}$ の値は，$x=0$ のとき $\boxed{（ア）\frac{3\sqrt{5}}{125}}$ であり，$x=4$ のとき $\boxed{（イ）\frac{1}{81}}$ である。（解答は指数を含まない形で表し，根号を含む場合は分母を有理化すること。）

(ii) 等式 $f(x)=12x^2-9x-1$

$$f(x)=12x^2+6x\int_0^1 f(t)\,dt+2\int_0^1 tf(t)\,dt$$

を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。（答えのみを解答用紙Bの所定の枠内に記入しなさい。）

(iii) $a<b<c$ かつ $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=2$ を満たす自然数の組 (a,b,c) をすべて求めよ。（答えのみを解答用紙Bの所定の枠内に記入しなさい。）

(iv) ある業者は，三つの工場A, B, Cから廃棄物を回収し，その中に含まれる三つの金属P, Q, Rを取り出して新たな製品Kを作る。各工場の廃棄物から取り出されるP, Q, Rの量は以下の通りである。

- 工場Aの廃棄物10kgからPが3kg, Qが5kg, Rが1kg取り出される。
- 工場Bの廃棄物10kgからPが1kg, Qが3kg, Rが2kg取り出される。
- 工場Cの廃棄物10kgからPが4kg, Qが1kg, Rが1kg取り出される。

また，Pが2kgと，Qが2kgと，Rが1kgで製品Kが1個作られる。工場A, B, Cから合わせて200kgの廃棄物が回収できるとき，製品Kをできるだけ多く作るには，工場Aから $\boxed{（ウ）}$ kg, 工場Bから $\boxed{（エ）}$ kg, 工場Cから $\boxed{（オ）}$ kgの廃棄物を回収すればよく，そのとき製品Kは $\boxed{（カ）}$ 個作ることができる。

(i)

(ア) $3\cdot 5^{-\frac{5}{2}}=\dfrac{3}{25\sqrt{5}}=\underline{\dfrac{3\sqrt{5}}{125}}$ //

(イ) $3\cdot 9^{-\frac{5}{2}}=\dfrac{3}{3^5}=\underline{\dfrac{1}{81}}$ //

(ii) $f(x)=12x^2+ax+b$ とおくと，

$$\int_0^1 f(t)\,dt=4+\frac{a}{2}+b$$

$$\int_0^1 tf(t)\,dt=3+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$$ より，

$ax+b$

$=(24+3a+6b)x+(6+\frac{2}{3}a+b)$ の

係数を比較して $(a,b)=(-9,-1)$

$\therefore\ \underline{f(x)=12x^2-9x-1}$ //

(iii) $2=\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}<\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{a}=\dfrac{6}{a}$ から，$a=1$ または2

① $a=1$ のとき

$1=\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}<\dfrac{5}{b}$ と，$\dfrac{2}{b}=1-\dfrac{3}{c}<1$ より，$b=3$ または4

△1 $b=3$ のとき

$\dfrac{3}{c}=\dfrac{1}{3}$ より $c=9$ で，これは適する。

△2 $b=4$ のとき

$\dfrac{3}{c}=\dfrac{1}{2}$ より $c=6$ で，これは適する。

② $a=2$ のとき

$\dfrac{3}{2}=\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}<\dfrac{5}{b}$ より $b=3$，$c=\dfrac{18}{5}$ となるもこれは適さない。

$\therefore$ 以上より $\underline{(a,b,c)=(1,3,9),(1,4,6)}$ //

(iv) この問題は半ばパズルのような問題で、答えっぽいものを出す難易度と、それが答えだと証明する難易度に乖離がある。
そのため、短答式であることも踏まえ、答えの見つけ方と、証明を分けて掲載する。

＜文字の設定＞

A, B, C から回収する量をそれぞれ a, b, c (kg) とし、それらから取り出された P, Q, R の量をそれぞれ p, q, r (kg) とすると、この間には以下が成り立つ。

$$\begin{cases} p = \frac{3}{10}a + \frac{1}{10}b + \frac{4}{10}c \\ q = \frac{5}{10}a + \frac{3}{10}b + \frac{1}{10}c \\ r = \frac{1}{10}a + \frac{2}{10}b + \frac{1}{10}c \end{cases}$$

また、
$a+b+c=200$ である。

☆答えの見つけ方

直観的に分かることとして、P, Q, R の余りを出さないことが、K の最大化において重要なことである。
ゆえに、$p:q:r = 2:2:1$ となるような (a, b, c) があれば、そのときの K が最大なのでは？と考えると…

$p:q:r = 2:2:1 \Rightarrow p = q$ かつ $q = 2r$ だから、

$$\begin{cases} a+b+c=200 \\ \frac{3}{10}a+\frac{1}{10}b+\frac{4}{10}c = \frac{5}{10}a+\frac{3}{10}b+\frac{1}{10}c \\ \frac{5}{10}a+\frac{3}{10}b+\frac{1}{10}c = \frac{2}{10}a+\frac{4}{10}b+\frac{2}{10}c \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 50 \text{（ウ）} \\ b = 70 \text{（エ）} \\ c = 80 \text{（オ）} \end{cases}$$

であり、このとき $K = r = \frac{1}{10}a + \frac{2}{10}b + \frac{1}{10}c = \underline{27}$ （カ）

以降、証明が気になる方はどうぞ！

☆ゴウカライズ数学チームが証明してみた

まず，$K = \min\left\{\left\lfloor \frac{p}{2}\right\rfloor, \left\lfloor \frac{q}{2}\right\rfloor, \lfloor r\rfloor\right\}$

$\quad = \left\lfloor \min\left\{\frac{p}{2}, \frac{q}{2}, r\right\}\right\rfloor$ であるので，

結局，$\min\left\{\frac{p}{2}, \frac{q}{2}, r\right\}$ の最大化を考えればよい．

そして，これは

$\min\{3a+b+4c, 5a+3b+c, 2a+4b+2c\}$ の最大化に帰着できる．

更に，$a+b+c=200$ であることから，$a, b \geqq 0$ かつ $a+b \leqq 200$ における

$\min\{800-a-3b, 4a+2b+200, 400+2b\}$ の最大化を考えればよい．

$=: I_1$ とおく．

まず $(a,b)=(50,70)$ とすることで $I_1 = 540$ となる．

ここで，$I_1 > 540$ となるような (a,b) が存在すると仮定し，

これを (a_0, b_0) とする．このとき a_0, b_0 は以下を満たす．

$$\begin{cases} 800-a_0-3b_0 > 540 \\ 4a_0+2b_0+200 > 540 \\ 400+2b_0 > 540 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0+3b_0 < 260 & \text{— ①} \\ 2a_0+b_0 > 170 & \text{— ②} \\ b_0 > 70 & \text{— ③} \end{cases}$$

②，③より $2(a_0+3b_0) = (2a_0+b_0) + 5\cdot b_0 > 170 + 5\cdot 70 = 520$ より

$a_0+3b_0 > 260$ を得るも，これは①と同時に成立することはないため，

このような (a_0, b_0) は存在せず矛盾．

$\therefore (a,b)=(50,70)$ のときに I_1 は最大値 540 を取り，

ここから，求める K も $(a,b,c)=(50,70,80)$ のときに最大値を

取ることが分かり，それは 27 である．$\blacksquare$

II. 以下の問いに答えなさい。

(i) $\sqrt{13}$ を10進法の小数で表したとき小数第3位の数字は $\boxed{(1)}$，小数第4位の数字は $\boxed{(2)}$ である。ただし，必要であれば $(3.606)^2 = 13.003236$ であることを用いてよい。

(ii) ベクトルの列 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \ldots$ を条件

$$\vec{a}_1 = (1, 0), \quad \vec{a}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \vec{a}_{n+2} = \frac{\vec{a}_{n+1}\cdot\vec{a}_n}{|\vec{a}_n|^2}\vec{a}_n$$

で定める。このとき $\vec{a}_9 = \left(\dfrac{\boxed{(3)}}{\boxed{(4)}\boxed{(5)}\boxed{(6)}}, \boxed{(7)}\right)$ である。また，$|\vec{a}_n| < 10^{-25}$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{(8)}\boxed{(9)}$ である。ただし，必要であれば，$\log_{10}2 = 0.301$ を近似として用いてよい。

(iii) 1から n までの n 個の自然数の最小公倍数を a_n とする。

- $a_n = a_{n+1}$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{(10)}$ である。
- $a_{n+1} = 2a_n$ を満たす10000以下の自然数 n は $\boxed{(11)}\boxed{(12)}$ 個ある。

(iv) xy 平面上で，不等式 $x \leqq 5$ の表す領域を A，不等式 $x + y \geqq 10$ の表す領域を B とする。また，xy 平面上の点の集合 S は以下の3つの条件をすべて満たす。

(条件1) S に含まれるどの点も，その x 座標と y 座標はともに1以上10以下の自然数である。

(条件2) S の要素で領域 A に含まれるものは，領域 B に含まれる。

(条件3) S の要素で領域 B に含まれるものは，領域 A に含まれる。

S を，条件1〜3を満たす中で要素の個数が最大のものとするとき，その要素の個数は $\boxed{(13)}\boxed{(14)}$ である。

(i) $3.605^2 = 12.996025$ より，

$3.605^2 < 13 < 3.606^2$

$3.605 < \sqrt{13} < 3.606$

$\therefore$ (1) $\underline{5}$

$$3.6055^2 = (3.605 + 0.0005)^2$$
$$= 3.605^2 + 0.001 \cdot 3.605 + (\text{小数第5位以下の項})$$
$$= 12.999\ldots$$

$$3.6056^2 = (3.6055 + 0.0001)^2$$
$$= 12.9996\ldots + 0.0007\ldots + (\text{小数第5位以下の項})$$
$$= 13.000\ldots$$ より，

$3.6055^2 < 13 < 3.6056^2$

$3.6055 < \sqrt{13} < 3.6056$

$\therefore$ (2) $\underline{5}$

(ii) まず $\overrightarrow{a_n}$ の定義から，

$$\overrightarrow{a_n} = \begin{cases} |\overrightarrow{a_n}|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & (n:\text{奇数}) \\ |\overrightarrow{a_n}|\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} & (n:\text{偶数}) \end{cases}$$

となることが分かる。このことから，

すべての自然数 n に対して，$\overrightarrow{a_n}$ と $\overrightarrow{a_{n+1}}$ のなす角は常に 60° である。

従って，漸化式は，$\overrightarrow{a_{n+2}} = \dfrac{|\overrightarrow{a_{n+1}}||\overrightarrow{a_n}|\cdot\cos 60^\circ}{|\overrightarrow{a_n}|^2}\overrightarrow{a_n}$ とできて，

両辺の絶対値を取れば，$|\overrightarrow{a_{n+2}}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{a_{n+1}}|$ $(n \geqq 1)$ となる。これと，$|\overrightarrow{a_2}| = 1$ から，

$|\overrightarrow{a_n}| = \dfrac{1}{2^{n-2}}$ $(n \geqq 2)$ であることが分かる。これより $\overrightarrow{a_9} = \underline{\left(\dfrac{1}{128}, 0\right)}$ (3)〜(7)

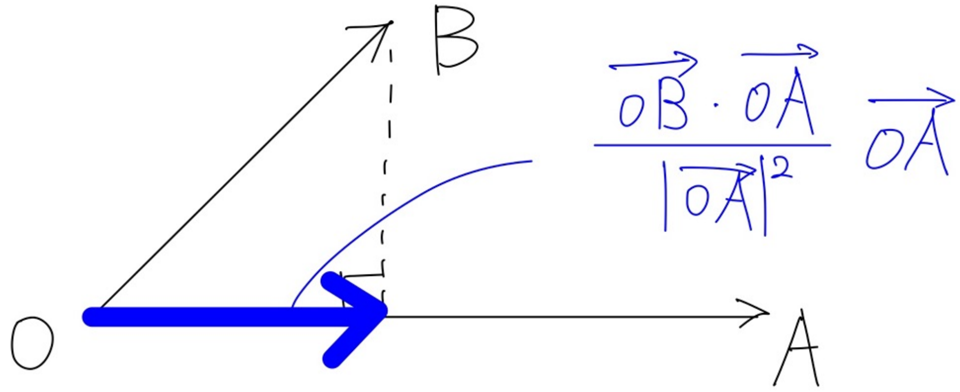
また，$|\overrightarrow{a_n}| < 10^{-25} \Leftrightarrow 2^{n-2} > 10^{25} \Leftrightarrow n > 2 + \dfrac{25}{\log_{10}2} > 2 + \dfrac{25}{0.301} = 85.05\ldots$

$\therefore$ これを満たす最小の自然数 n は $n = \underline{86}$ (8)

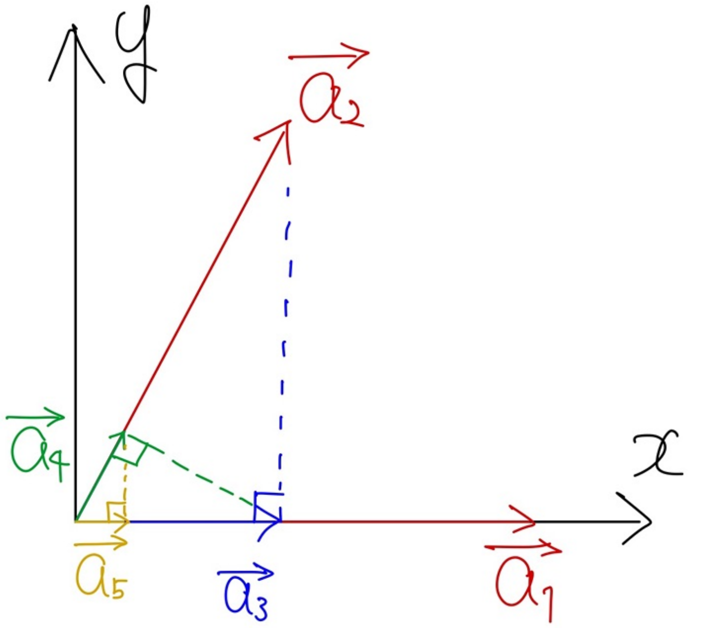
(ii)の裏話(受験頻出!)

実は、$\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\overrightarrow{OA}$ として定義されるベクトルを

$\overrightarrow{OB}$ の $\overrightarrow{OA}$ への正射影ベクトルと言う.



これを踏まえると,先の問題は…



左図のように,
2本の赤いベクトル
$\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ から始めて,
次々と正射影を
繰り返すことで
$\overrightarrow{a_3}$, $\overrightarrow{a_4}$, $\overrightarrow{a_5}$, … を
生み出していたことが
分かり,かなり解答が
楽になります!

(iii) $a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=6,\ a_4=12,\ a_5=60,\ a_6=60$

だから，$a_{n+1}=a_n$ を満たす最小の n は $\underline{n=5}_{\#}$ (10)

$a_{n+1}=2a_n$ となるとき，$n+1$ は n 以下のどの

自然数よりも多い個数の素因数2を持つ必要があり，逆にこのとき $a_{n+1}=2a_n$ を満たす．

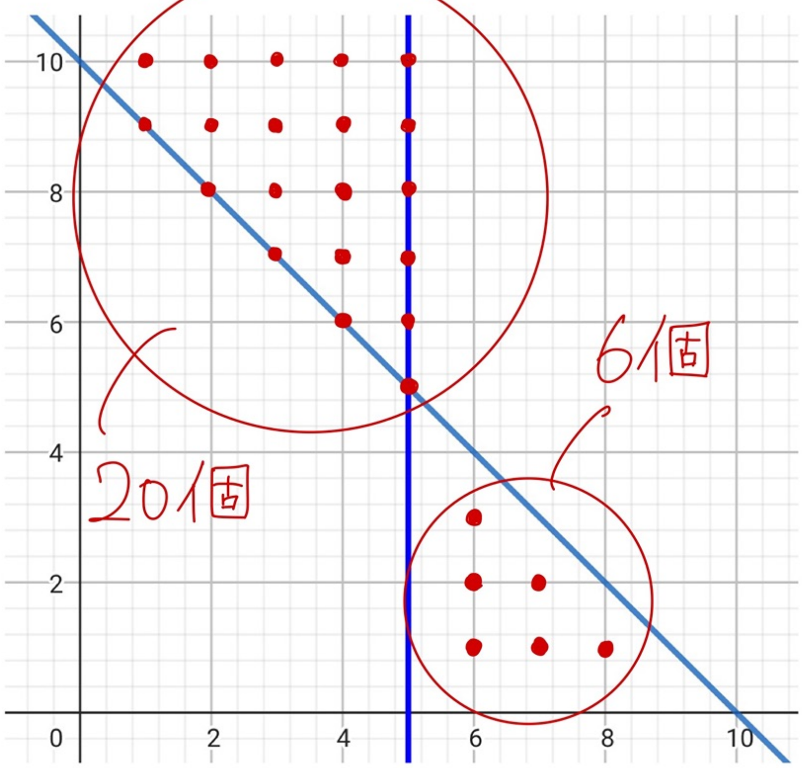
ゆえに，求める n の個数は，$n+1=2^k$ を満たす

自然数 k の個数に一致して，$1 \leqq n \leqq 10000$ より

$2 \leqq 2^k \leqq 10001$ で，これを満たす k の個数は

$k=1,2,\dots,13$ の $\underline{13\text{個}}_{\#}$ (11)(12)

(iv)



$x=0$ または $y=0$

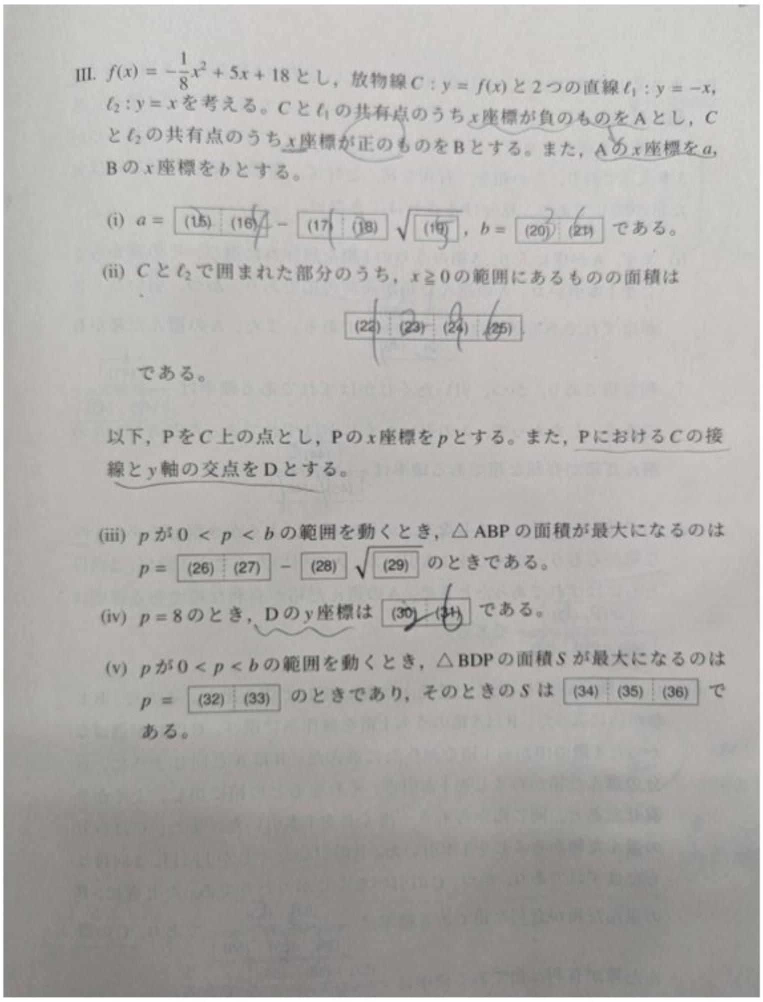
上にある点は

含まないことに注意して

数え上げると，

$\underline{26\text{個}}_{\#}$ である．

(13)(14)



III. $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 5x + 18$ とし，放物線 $C : y = f(x)$ と2つの直線 $\ell_1 : y = -x$, $\ell_2 : y = x$ を考える。C と ℓ_1 の共有点のうち x 座標が負のものをAとし，C と ℓ_2 の共有点のうち x 座標が正のものをBとする。また，Aの x 座標を a, Bの x 座標を b とする。

(i) $a = \boxed{(15)\ (16)} - \boxed{(17)\ (18)}\sqrt{\boxed{(19)}}$, $b = \boxed{(20)\ (21)}$ である。

(ii) C と ℓ_2 で囲まれた部分のうち，$x \geqq 0$ の範囲にあるものの面積は

$$\boxed{(22)\ (23)\ (24)\ (25)}$$

である。

以下，Pを C 上の点とし，Pの x 座標を p とする。また，Pにおける C の接線と y 軸の交点をDとする。

(iii) p が $0 < p < b$ の範囲を動くとき，△ABPの面積が最大になるのは $p = \boxed{(26)\ (27)} - \boxed{(28)}\sqrt{\boxed{(29)}}$ のときである。

(iv) $p = 8$ のとき，Dの y 座標は $\boxed{(30)\ (31)}$ である。

(v) p が $0 < p < b$ の範囲を動くとき，△BDPの面積 S が最大になるのは $p = \boxed{(32)\ (33)}$ のときであり，そのときの S は $\boxed{(34)\ (35)\ (36)}$ である。

(i)

$$-\frac{1}{8}x^2 + 5x + 18 = -x \iff x^2 - 48x - 144 = 0$$
$$\iff x = 24 \pm 12\sqrt{5}$$

なので

$$a = 24 - 12\sqrt{5}$$

である。

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{8}x^2+5x+18=x &\iff x^2-32x-144=0\\
&\iff (x+4)(x-36)=0\\
&\iff x=-4, 36
\end{aligned}
$$

なので

$$b=36$$

である。

(ii) 求める面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S=&\int_0^{36}\left\{\left(-\frac{1}{8}x^2+5x+18\right)-x\right\}dx\\
&\frac{1}{8}\int_{36}^{0}(x+4)(x-36)dx\\
&\frac{1}{8}\int_{36}^{0}\{(x-36)^2+40(x-36)\}dx\\
&\frac{1}{8}\left[\frac{(x-36)^3}{3}+20(x-36)^2\right]_{36}^{0}\\
&1296.
\end{aligned}
$$

(iii) AB が一定なことに着目すると、△ABP の面積が $0<p<b$ の範囲で最大となるのは、点 P における放物線 C の接線が直線 AB と平行になるときである。

任意の実数 x に対し

$$f'(x)=-\frac{1}{4}x+5$$

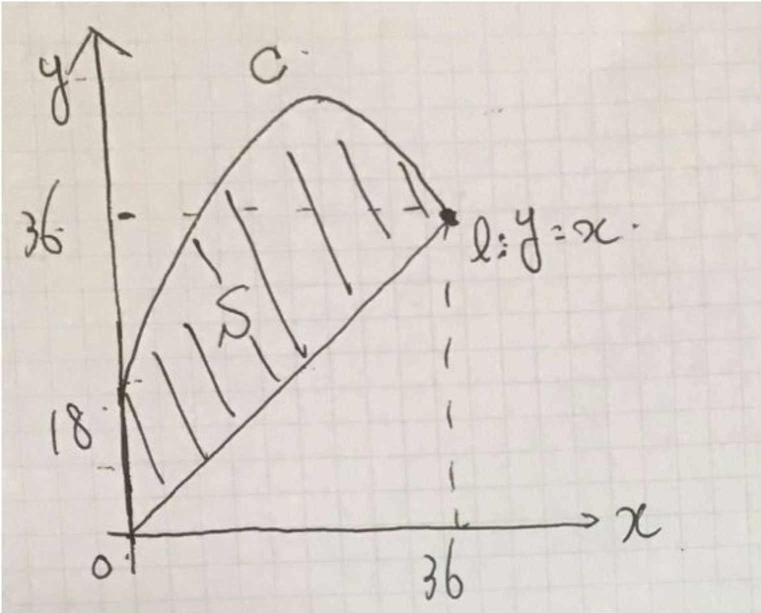
なので

$$f'(p)=-\frac{1}{4}p+5$$

である。

また、直線 AB の傾きは

$$
\begin{aligned}
\frac{b+a}{b-a}&=\frac{36-(-24+12\sqrt{5})}{36-(24-12\sqrt{5})}\\
&=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)^2}{4}
\end{aligned}
$$



である。

よって、求める p の条件は

$$-\frac{1}{4}p+5=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)^2}{4}$$

である。

これを解くと

$$p=30-6\sqrt{5}$$

である。

(iv) $p=8$ のとき

$$f'(p)=3$$

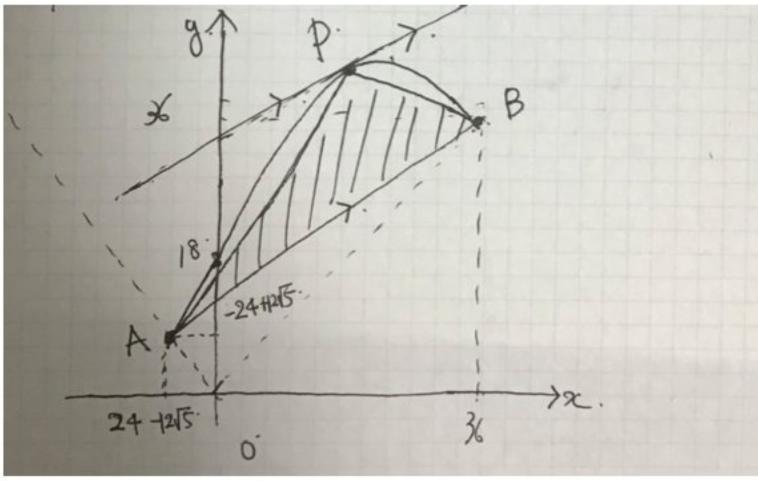
であり

$$f(p)=50$$

である。

よって、点 $(p,f(p))$ における曲線 C の接線の方程式は

$$y=3(x-8)+50.$$



つまり

$$y = 3x + 26$$

であるから D の y 座標は 26 である。

(v)

$$X = 36$$

とする。BD を $p : X - p$ に内分した点の y 座標と P の y 座標の差を高さとすると

$$\triangle \mathrm{BDP} = \frac{X}{2}\left(f(p) - \left(\frac{X-p}{X}(-pf'(p) + f(p) - \frac{p}{X}X)\right)\right)$$

である。

$$F(p) = (f(p) - \left(\frac{X-p}{X}(-pf'(p) + f(p) - \frac{p}{X}X)\right)$$

とおくと

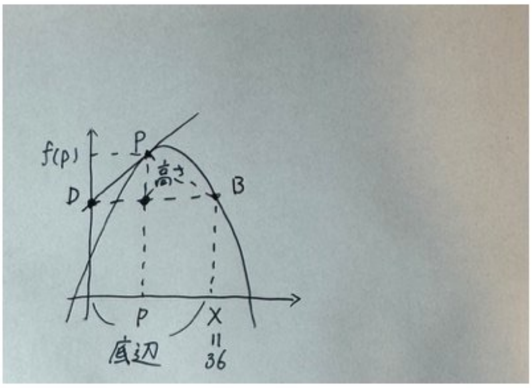
$$F'(p) = \frac{1}{96}(p-12)(p-36)$$

である。F は $0 < p \leqq 12$ の範囲で単調増加し、$12 < p < 36$ の範囲で単調減少する。

よって $\triangle$BDP の最大値は $p = 12$ で

$$(\triangle \mathrm{BDP} \text{ の最大値は}) = 432$$

である。



4.

(ｉ)

$$\underbrace{\frac{4}{5}}_{A\text{ が通常の箱を選ぶ}} \times \underbrace{\frac{9}{10}}_{\text{ハズレを引く}} = \frac{18}{25}.$$

また

$$\underbrace{\frac{1}{5}}_{A\text{ が有利な箱を選ぶ}} \times \underbrace{\frac{5}{10}}_{\text{ハズレを引く}} = \frac{1}{10}.$$

よって A の引いたくじがハズレであった時に、A の選んだ箱が有利な箱である確率は

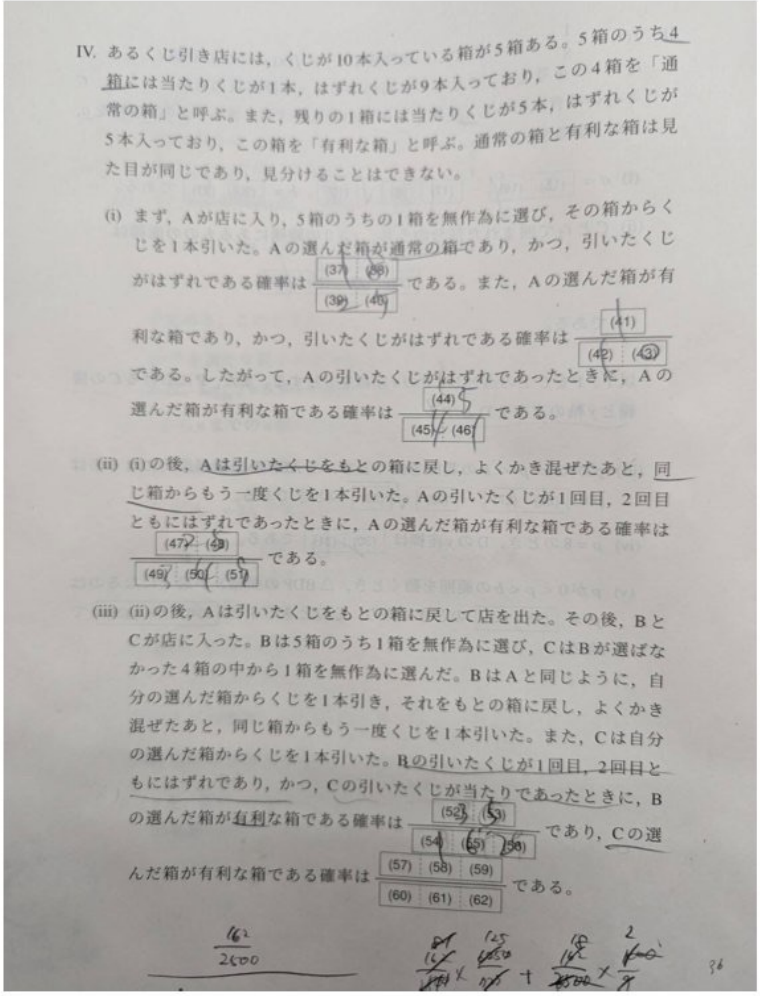
$$\frac{\frac{1}{10}}{\frac{18}{25}+\frac{1}{10}} = \frac{5}{41}.$$

(ii) A が 1 回目と 2 回目ともにハズレを引くのは

- 通常の箱から 2 回ハズレを引く
- 有利な箱から 2 回ハズレを引く

の 2 つの排反な事象の和事象である。
事象「通常の箱から 2 回ハズレを引く」が起こる確率は

$$\underbrace{\frac{18}{25}}_{\text{通常の箱を選んで 1 回目にハズレを引く}} \times \underbrace{\frac{9}{10}}_{\text{またハズレを引く}} = \frac{81}{125}.$$



IV. あるくじ引き店には，くじが10本入っている箱が5箱ある。5箱のうち4箱には当たりくじが1本，はずれくじが9本入っており，この4箱を「通常の箱」と呼ぶ。また，残りの1箱には当たりくじが5本，はずれくじが5本入っており，この箱を「有利な箱」と呼ぶ。通常の箱と有利な箱は見た目が同じであり，見分けることはできない。

(i) まず，Aが店に入り，5箱のうちの1箱を無作為に選び，その箱からくじを1本引いた。Aの選んだ箱が通常の箱であり，かつ，引いたくじがはずれである確率は $\dfrac{\boxed{(37)}\,\boxed{(38)}}{\boxed{(39)}\,\boxed{(40)}}$ である。また，Aの選んだ箱が有利な箱であり，かつ，引いたくじがはずれである確率は $\dfrac{\boxed{(41)}}{\boxed{(42)}\,\boxed{(43)}}$ である。したがって，Aの引いたくじがはずれであったときに，Aの選んだ箱が有利な箱である確率は $\dfrac{\boxed{(44)}}{\boxed{(45)}\,\boxed{(46)}}$ である。

(ii) (i)の後，Aは引いたくじをもとの箱に戻し，よくかき混ぜたあと，同じ箱からもう一度くじを1本引いた。Aの引いたくじが1回目，2回目ともにはずれであったときに，Aの選んだ箱が有利な箱である確率は $\dfrac{\boxed{(47)}\,\boxed{(48)}}{\boxed{(49)}\,\boxed{(50)}\,\boxed{(51)}}$ である。

(iii) (ii)の後，Aは引いたくじをもとの箱に戻して店を出た。その後，BとCが店に入った。Bは5箱のうち1箱を無作為に選び，CはBが選ばなかった4箱の中から1箱を無作為に選んだ。BはAと同じように，自分の選んだ箱からくじを1本引き，それをもとの箱に戻し，よくかき混ぜたあと，同じ箱からもう一度くじを1本引いた。また，Cは自分の選んだ箱からくじを1本引いた。Bの引いたくじが1回目，2回目ともにはずれであり，かつ，Cの引いたくじが当たりであったときに，Bの選んだ箱が有利な箱である確率は $\dfrac{\boxed{(52)}\,\boxed{(53)}}{\boxed{(54)}\,\boxed{(55)}\,\boxed{(56)}}$ であり，Cの選んだ箱が有利な箱である確率は $\dfrac{\boxed{(57)}\,\boxed{(58)}\,\boxed{(59)}}{\boxed{(60)}\,\boxed{(61)}\,\boxed{(62)}}$ である。

事象「有利な箱から2回ハズレを引く」が起こる確率は

$$\underbrace{\frac{1}{10}}_{\text{有利な箱を選んで 1 回目にハズレを引く}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{またハズレを引く}} = \frac{1}{20}.$$

よって、A が1回目と2回目ともにハズレを引く確率は

$$\frac{81}{125} + \frac{1}{20} = \frac{349}{500}$$

以上から、求める確率は

$$\frac{\frac{1}{20}}{\frac{349}{500}} = \frac{25}{349}.$$

(iii) B が 1 回目と 2 回目ともにハズレを引き、C があたりを引くのは

- B, C ともに通常の箱から条件を満たすように引く
- B が有利な箱から、C が通常の箱から条件を満たすように引く
- B が通常の箱から、C が有利な箱から条件を満たすように引く

の 3 つの排反な事象の和事象である。

事象「B, C ともに通常の箱から条件を満たすように引く」確率は

$$\frac{4}{5} \times \left(\frac{9}{10}\right)^2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{243}{5000}.$$

事象「B が有利な箱から、C が通常の箱から条件を満たすように引く」確率は

$$\frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{4}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{25}{5000}.$$

事象「B が通常の箱から、C が有利な箱から条件を満たすように引く」確率は

$$\frac{4}{5} \times \left(\frac{9}{10}\right)^2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{405}{5000}.$$

よって、B が 1 回目と 2 回目ともにハズレを引き、C があたりを引く確率は

$$\frac{243}{5000} + \frac{25}{5000} + \frac{405}{5000} = \frac{673}{5000}.$$

よって、B が引いたくじが 2 回ともハズレで C の引いたくじがあたりであったときに、B の選んだ箱が有利な箱である確率は

$$\frac{\frac{25}{5000}}{\frac{673}{5000}} = \frac{25}{673}$$

である。

また、B が引いたくじが 2 回ともハズレで C の引いたくじがあたりであったときに、C の選んだ箱が有利な箱である確率は

$$\frac{\frac{405}{5000}}{\frac{673}{5000}} = \frac{405}{673}$$