1. 解答
U を $\mathrm{A, A, B, B, C, D}$ の 6 文字を 1 列に並べる並べ方全体の集合、その中で X を A が隣り合う並べ方全体の集合、Y を B が隣り合う並べ方全体の集合とする。また、集合 S の要素の個数を $n(S)$ と表すことにする。

(1)

$$n(U) = \frac{6!}{2!2!} = 180 \text{ 通り}$$

(2)　A が隣り合う並べ方は、AA をひとかたまりとして $\mathrm{AA, B, B, C, D}$ の 5 文字を並べる並べ方と同じなので

$$n(X) = \frac{5!}{2!} = 60 \text{ 通り}$$

(3)　(2) と同様の考えをすれば、$n(Y) = 60$ 通りが得られる。また、どの文字も隣り合う並べ方全体の集合は $X \cap Y$ である。これは、$\mathrm{AA, BB}$ をそれぞれひとかたまりとして、$\mathrm{AA, BB, C, D}$ の 4 文字を並べる並べ方を数えることと同じなので

$$n(X \cap Y) = 4! = 24 \text{ 通り}$$

どの文字も隣り合わない並べ方全体の集合は $\overline{X} \cap \overline{Y}$ である。
よって

$$\begin{aligned} n(\overline{X} \cap \overline{Y}) &= n(\overline{X \cup Y}) \quad (\because \text{ド・モルガンの法則}) \\ &= n(U) - n(X \cup Y) \\ &= n(U) - \{(n(X) + n(Y)) - n(X \cap Y)\} \\ &= 180 - \{(60 + 60) - 24\} \\ &= 84 \text{ 通り} \end{aligned}$$

解説　教科書や教科書傍用問題集に載っていそうな問題である。日本語をたらたら書くのは時間の無駄なので、集合を使うといい。ただし、場合の数で集合を事象としないこと。事象は確率で使う言葉！

2.
解答
(1)

$$\begin{aligned} y &= -\cos^2\theta + 2\sin\theta + 1 \\ &= -(1 - \sin^2\theta) + 2\sin\theta + 1 \\ &= \sin^2\theta + 2\sin\theta. \end{aligned}$$

この式に $t = \sin\theta$ を代入すると

$$y = t^2 + 2t.$$

(2)　θ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲を動くとき、$t = \sin\theta$ が動く範囲は

$$0 \leqq t \leqq 1$$

である。

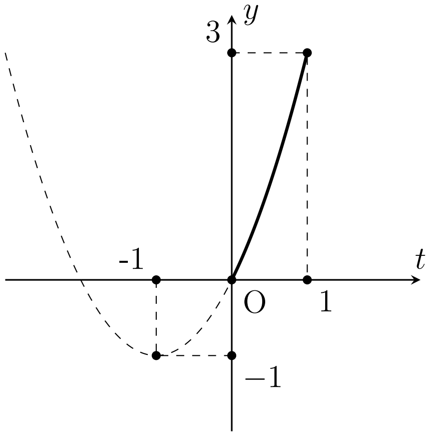
　よって、関数 $y = t^2 + 2t = (t+1)^2 - 1 \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$ は下図のような、軸が直線 $t = -1$ で頂点が $(-1, 1)$ の下に凸の放物線の一部である。

　したがって、関数 $y = t^2 + 2t = (t+1)^2 - 1 \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$ の最大値は 3 である。このときの t の値は 1 であり、これを満たす θ は $\sin\theta = 1$ から

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 \leqq t \leqq \pi).$$

　また、最小値は 0 である。このときの t の値は 0 であり、これを満たす θ は $\sin\theta = 0$ から

$$\theta = 0, \pi \quad (\because 0 \leqq t \leqq \pi).$$



(3)　$a = \dfrac{3\pi}{2}$ とする。このとき、$t = \sin\theta$ が動く範囲は

$$-1 \leqq t \leqq 1$$

である。

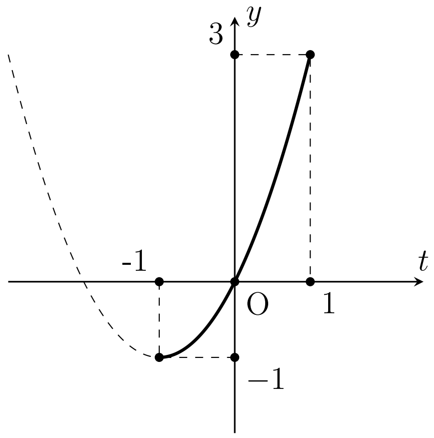
　下図のグラフから、関数 $y = t^2 + 2t = (t+1)^2 - 1 \quad (0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{2})$ は $t = -1$ のとき最小値 -1 をとる。このとき、θ の値は $\sin\theta = -1$ から

$$\theta = \frac{3\pi}{2} \quad (\because 0 \leqq \theta \leqq \frac{3\pi}{2})$$

ただひとつであることがわかる。

つまり、θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{2}$ の範囲を動くとき、y は -1 を最小値にとるが、θ が $0 \leqq \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ の範囲を動くとき常に y は -1 より大きい。

したがって、求める a の値は $a = \dfrac{3\pi}{2}$ である。



解説　大問 1 と同様教科書や教科書傍用問題集に載っていそうな問題。複雑な三角関数の最大・最小は、$\cos\theta[\sin\theta, \tan\theta]$ の多項式で表したり、$sin\theta, \cos\theta$ の対称式なら $t = \sin\theta + \cos\theta$ とおいて t の多項式に書き換える方法や和積・積和を使う方法が代表的だ。他にも、$\sin\theta = a\cos\theta + b$ の振る舞いを単位円 $x^2 + y^2 = 1$ と直線 $y = ax + b$ が共有点をもつかどうかで調べさせる問題もある。

3.

(1)

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \\
|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| &= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{6}.
\end{aligned}
$$

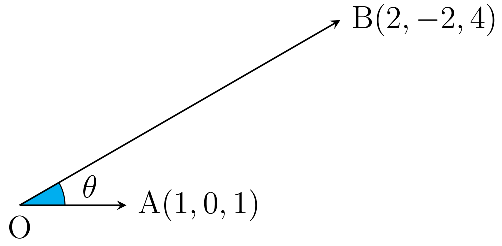
また

$$
\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 6
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

つまり $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ である。



(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \begin{pmatrix} s+2t \\ -2t \\ s+4t \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= \begin{pmatrix} s+2t-4 \\ -2t-1 \\ s+4t+6 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{CP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \text{ かつ} \overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0.$$

つまり

$$s + 3t = -1 \text{ かつ } s + 4t = -3$$

これを解くと $s = 5, t = -2$ である。

(3)　$\triangle$ABC の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{3}.\end{aligned}$$

また

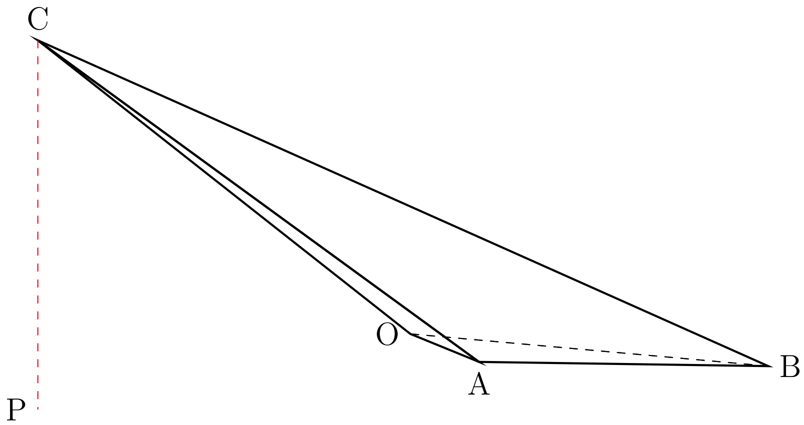
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

から

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}| = 3\sqrt{3}$$

よって求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot S \cdot |\overrightarrow{\mathrm{CP}}| \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} \\ &= 3. \end{aligned}$$



(3) の別解

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -6 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -10 \end{vmatrix} \\ &= (-2) \cdot (-10) - 1 \cdot 2 \\ &= 18 \end{aligned}$$

なので

$$V = \frac{1}{6} \cdot |18| = 3.$$

解説　(3) の四面体の体積を出したいために (1) と (2) が懇切丁寧に誘導としてついている。このような特徴のない四面体は空間座標やベクトルを使って、愚直に計算するしかない。3 次の行列式を知っていれば、別解のように四面体の体積を容易に出すことができる[1]。

[1]もちろん行列式を知っている必要などない。外積もそうである。

公式（四面体の体積）

$(0,0,0),(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3)$ が四面体を作るとき、その体積 V は

$$V=\frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\right|$$

で与えられる。
ただし、

$$\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & b_{23}\\ a_{31} & c_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & b_{23}\\ a_{31} & c_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

である[a]。

[a]絶対値記号の || と行列式の || が並ぶのが嫌なので、別の表記をしている。このことからわかるように行列式の値は正になるとは限らない

ちなみに 3 次の行列式はサラスの方法という計算方法がある。
サラスの方法

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{32}a_{23}+a_{12}a_{21}a_{33})$$

一方、特徴のある四面体（対称性がある四面体[2]、等面四面体[3]、等稜四面体[4]）はその特徴を活かす方が議論しやすい[5]。

具体的に述べると、対称性がある四面体は四面体を 2 つの合同な立体に切断するときにできる面に垂線の足や外接球・内接球の中心がある。等面四面体は直方体に埋め込み可能である。等稜四面体は垂線の足が底面の三角形の外心である。

4.

解答

(1)　2 点 $\mathrm{P}_n(n,n^2),\mathrm{P}_{n+1}(n+1,(n+1)^2)$ を通る直線 l_n の方程式は

$$y=\frac{(n+1)^2-n^2}{(n+1)-n}(x-n)+n^2.$$

[2]東大文系 2023 第 4 問に類題
[3]東大理系後期 1996 第 2 問に類題
[4]東大理系 1982 第 2 問に類題
[5]別に四面体に限ったことではない。

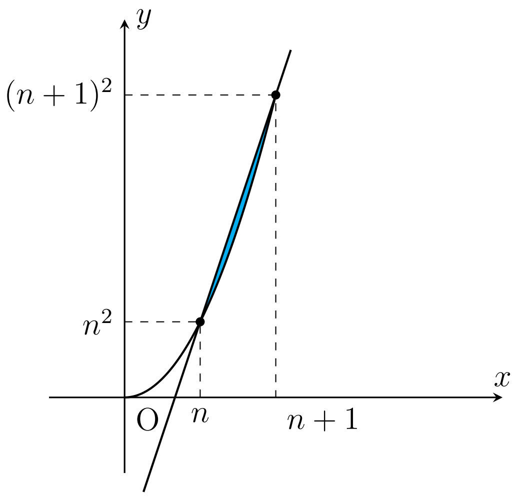
つまり

$$y = (2n+1)x - n^2 - n.$$

(2)　放物線 $y = x^2$ は下に凸なので直線 $y = (2n+1)x - n^2 - n$ は $n \leqq x \leqq n+1$ の範囲でこの放物線の上側にある。

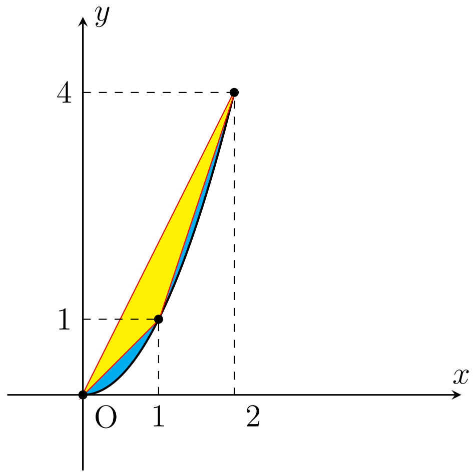
よって、下図の色についた部分の面積が S_n である。

$$\begin{aligned} S_n &= \int_n^{n+1} \{(2n+1)x - n^2 - n - x^2\} dx \\ &= \left[\frac{2n+1}{2} x^2 - (n^2+n)x - \frac{x^3}{3} \right]_n^{n+1} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$



(3)　直線 $y = mx$ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた領域から、直線 $l_i\,(i = 0, 1, \cdots, m-1)$ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた領域を除いてできる領域の面積が求める面積 T_m である。

$$\begin{aligned} T_m &= \int_0^m (mx - x^2) dx - \sum_{k=0}^{m-1} S_k \\ &= \left[\frac{m}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^m - m \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{m(m-1)(m+1)}{6}. \end{aligned}$$



$m=2$ の場合

解説　積分を使って面積を求めるだけの問題。私は $\frac{1}{6}$ 公式を使ってもいいと思うのだが、使うのが怖かったら計算では $\frac{1}{6}$ 公式を使い、模範解答のように答案には正攻法で計算した過程を書いておけばよい。

S_n を $\frac{1}{6}$ 公式で計算すると

$$\begin{aligned} S_n &= \int_n^{n+1} \{(2n+1)x - n^2 - n - x^2\} dx \\ &= -\int_n^{n+1} (x-n)(x-n-1) dx \\ &= (-1) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)(n+1-n)^3 \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

5.

解答

(1)　真

$\because$ n と $n+2$ がともに素数であるとする。このとき、n は素数である。

(2)　偽 (反例：$n=2$)

$\because$ $n=2$ のとき、n は素数であるが、n は奇数ではない。

(3)　真

$\because q \Longrightarrow r$ を示すために、その対偶 $\bar{r} \Longrightarrow \bar{q}$ が真であることを示す。$\bar{r}$ が成り立つとする。このとき、n は偶数なので、適当な自然数 k を用いて

$$n = 2k$$

と表される。

$n+2 = 2(k+1) \geqq 2 \cdot (1+1) = 4$ なので、$n+2$ は 2 ではない偶数である。したがって $n+2$ は合成数である。これは、$\bar{q}$ を満たす。

よって $\bar{r} \Longrightarrow \bar{q}$ は真であるから、$q \Longrightarrow r$ は真である。

n と $n+2$ がともに素数であるとする。

(4)　偽 (反例：$n=1$)

$\because n=1$ とする。n は合成数でない。さらに n は素数ではない。

解説　2 つの $x \in X$ の条件 $p(x), q(x)$ から作られる「任意の $x \in X$ に対し[6]、$p(x) \Longrightarrow q(x)$」が真であることを示すには、$p(x)$ が真であると仮定し、$q(x)$ が真であることを示す。一方、偽であることを示すには $p(x)$ が真であり $q(x)$ が偽であるような $x \in X$ をひとつあげればよい。

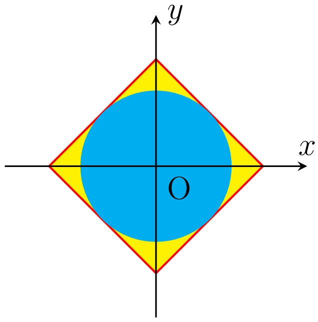
また、条件 $p(x)$ を真にするような $x \in X$ 全体の集合を $p(x)$ の真理集合と呼ぶのであった。任意の $x \in X$ に対し、$p(x) \Longrightarrow q(x)$ が真になるとき $p(x), q(x)$ の真理集合 P, Q に対し

$$P \subset Q$$

が成り立ち、$P \subset Q$ のとき、任意の $x \in X$ に対し、$p(x) \Longrightarrow q(x)$ が真になる。

これを利用して、$p(x) \Longrightarrow q(x)$ を視覚的に証明することもできる。

例　任意の実数 x, y に対し、$x^2 + y^2 \leqq 1 \Longrightarrow |x| + |y| \leqq \sqrt{2}$ を示せ。



図示すると簡単に示すことができる。

[6]赤線部は省略されて単に $p(x) \Longrightarrow q(x)$ のみで「」の意味を指すことも多い。本問もそうである。

示しにくい命題は、背理法や対偶の利用も考えましょう。

背理法とは、ある命題 p を示すためにその否定命題 $\bar{p}$ が成り立つと仮定して矛盾を導き出す方法である。注意すべきことは、「$p \Longrightarrow q$」の否定は「$p \Longrightarrow \bar{q}$」ではなく、「$p$ であり q でない」である。

対偶は、命題 $p \Longrightarrow q$ と $\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$ が同値であるから、それが真であることを代わりに調べる方法である。