1.

(1)　$4 < 5 < 9$ なので、$2 < \sqrt{5} < 3$ である。よって、$a = \sqrt{5} - 2$ なので

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{a} &= \sqrt{5} - 2 + \frac{1}{\sqrt{5} - 2} \\ &= \sqrt{5} - 2 + (\sqrt{5} + 2) \\ &= 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} (i^{10} + 3)(i^{13} + 4) &= ((i^2)^5 + 3)(i(i^4)^3 + 4) \\ &= (-1 + 3)(i + 4) \\ &= 8 + 2i. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \cos \mathrm{A} &= \frac{4^2 + 5^2 - (\sqrt{21})^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

つまり

$$\sin \mathrm{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって、求める面積を $S$ とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} \sin \mathrm{A} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 5\sqrt{3}. \end{aligned}$$

(4)　求める平均値は

$$\frac{2 + 5 + 9 + 11 + 13}{5} = 8.$$

また、標準偏差は

$$\sqrt{\frac{(2-8)^2 + (5-8)^2 + (9-8)^2 + (11-8)^2 + (13-8)^2}{5}} = 4.$$

2.

(1)　円 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ が 3 点 $(-3,1),(1,-3),(1,5)$ を通るための必要十分条件は

$$\begin{cases}(-3)^2+1^2-3l+m+n=0\\1^2+(-3)^2+l-3m+n=0\\1^2+5^2+l+5m+n=0\end{cases}$$

これを解くと $l=-2,m=-2,n=-14$

したがって 3 点 $(-3,1),(1,-3),(1,5)$ を通る円の方程式は

$$x^2+y^2-2x-2y-14=0.$$

つまり

$$(x-1)^2+(y-1)^2=4^2$$

なので、この円の中心の座標は $(1,1)$ であり、半径は 4 である。

(2)　12 枚のカードからカードを同時に 2 枚取り出すとき総数は

$${}_{12}\mathrm{C}_2 \text{通り}.$$

12 枚のカードからカードを同時に 2 枚取り出したとき、その 2 枚のカードに書かれている数字の和が 3 の倍数になる事象は

「取り出した 2 枚のカードに書かれている数字がともに 3 の倍数」

の場合と

「取り出した 2 枚のカードのうち片方に書かれている数字が 3 で割って 1 余る。
そして、もう一方に書かれている数字が 3 で割って 2 余る」

場合の 2 つで前者の事象を $A$ とし後者を $B$ とする。

事象 $A$ を満たすものの総数は

$${}_{4}\mathrm{C}_2 \text{通り}.$$

よって、事象 $A$ が起こる確率は

$$\frac{{}_{4}\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2}$$

また事象 $B$ を満たすものの総数は

$$4\cdot 4 \text{通り}.$$

よって、事象 $B$ が起こる確率は

$$\frac{4\cdot 4}{{}_{12}\mathrm{C}_2}$$

$A$ と $B$ は排反なので、求める確率は

$$\frac{{}_{4}\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2}+\frac{4\cdot 4}{{}_{12}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}.$$

(3)　$x^2-4x-k=0$ の判別式を $D$ とする。

$$\begin{aligned}
\text{放物線 } C \text{ と直線 } l \text{ がちょうど 1 つの共有点をもつ} &\iff x^2=4x+k \text{ が重解をもつ}\\
&\iff x^2-4x-k=0 \text{ が重解をもつ}\\
&\iff \frac{D}{4}=0\\
&\iff (-2)^2+k=0\\
&\iff k=-4.
\end{aligned}$$

よって直線 $l$ の方程式は $y=4x-4$ である。

直線 $l$ と $x$ 軸との交点の $x$ 座標は $0=4x-4$ から $x=1$ である。

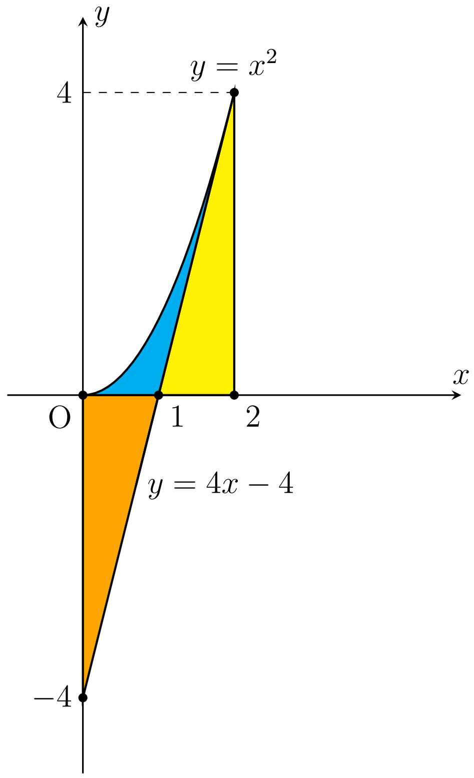
求める面積は藍紫色の領域とオレンジ色の領域の和集合の面積だが、オレンジ色の三角形と黄色の三角形は合同なので、求める面積と藍紫色の領域と黄色の領域の和集合の面積は等しい。

つまり、求める面積を $S$ とすると、

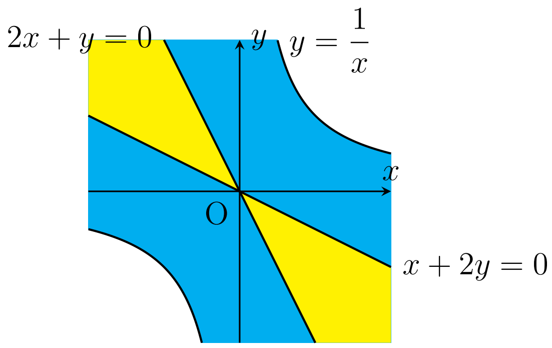
$$S=\int_0^2 x^2dx.$$

これを計算すると

$$\begin{aligned}
S&=\int_0^2 x^2dx\\
&=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2\\
&=\frac{8}{3}.
\end{aligned}$$




(4)　条件「$2x^2+5xy+2y^2<0$」は条件「$(x+2y)(2x+y)<0$」で書き換えられる。この条件を満たす点 $(x,y)$ の領域は以下の黄色の部分であり、条件「$xy<1$」を満たすのは色がついた領域である。したがって、条件「$2x^2+5xy+2y^2<0$」は条件「$xy<1$」の十分条件であるが、必要条件ではない。




(4) の別解

$\because$　$x, y$ を実数に対し

$$p(x,y): 2x^2+5xy+2y^2<0, q(x,y): xy<1$$

とおく。

まず、$p(x,y)$ は $q(x,y)$ が成り立つための十分条件であることを示す。

実数 $x, y$ が $p(x,y)$ を満たすとする。このとき、$x, y$ は実数なので $2x^2 \geqq 0$ かつ $2y^2 \geqq 0$ なので

$$xy \leqq 0$$

が必要である。

よって、$xy < 1$ が必要なので、$p(x,y)$ は $q(x,y)$ が成り立つための十分条件である。

次に、$p(x,y)$ は $q(x,y)$ が成り立つための必要条件でないことを示す。

$x = 0$ かつ $y = 0$ とする。

$2x^2 + 5xy + 2y^2 = 2 \cdot^2 5 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0^2 = 0$ だから、$p(0,0)$ は偽である。

また、$xy = 0 \cdot 0 = 0$ なので、$q(0,0)$ は真である。

3.

(1)　$b_1 = -5, b_n = \log_2 a_n \quad (n = 1, 2, \cdots, )$ から

$$\log_2 a_1 = -5.$$

つまり

$$a_1 = \frac{1}{32}.$$

数列 $\{a_n\}$ の公比を $r$ とおくと

$$a_n = \frac{1}{32} r^{n-1} \quad (n = 1, 2, \cdots, ) \quad \cdots ①$$

$$\sum_{k=1}^{5} b_k = 5$$

なので、① を代入して整理すると

$$-25 + \log_2 r^{10} = 5$$

つまり

$$\log_2 r = 3.$$

これを解くと

$$r = 3.$$

$r = 3$ を ① に代入すると

$$a_n = 2^{3n-8} \quad (n = 1, 2, \cdots, ).$$

よって

$$a_2 = \frac{1}{4}.$$

(2)

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{10} a_k &= \prod_{k=1}^{10} 2^{3k-8} \\ &= 2^{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (-5+22)} \\ &= 2^{85}. \end{aligned}$$

(3)

$$\prod_{k=1}^{10} a_k = 2^{85}$$

が $n$ 桁の整数だとすると

$$10^n \leqq 2^{85} < 10^{n+1}.$$

　各辺、常用対数をとって整理すると

$$n \leqq 85 \log_{10} 2 < n+1$$

$\log_{10} 2 = 0.3010$ なので

$$n \leqq 85 \cdot 0.3010 < n+1.$$

つまり

$$25.585 < n \leqq 26.585.$$

よって、$n = 26$ であるから

$$\prod_{k=1}^{10} a_k$$

は 26 桁の整数である。

　補足

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times \cdot \times a_n$$

である。

4.

(1)　直線 $l_i \quad (i=1,2,3)$ に平行で原点を通る直線を $m_i \quad (i=1,2,3)$ とし、$l_2$ と $x$ 軸の正の方向とのなす角を $\alpha$, $l_3$ と $x$ 軸の正の方向とのなす角を $\beta$ とする。$l_i, l_j \quad (i,j=1,2,3; i \neq j)$ のなす角は $m_i, m_j \quad (i,j=1,2,3; i \neq j)$ のなす角と変わらない。

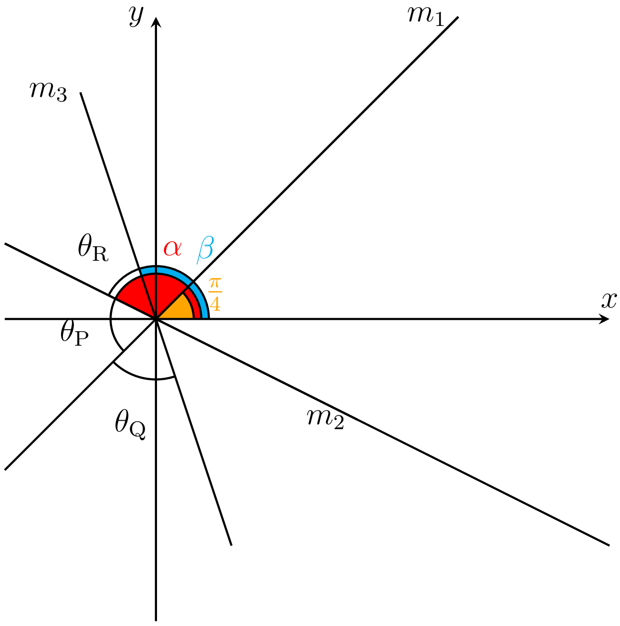
$$\begin{aligned}\tan(\pi-\theta_p) &= \tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\tan\alpha-\tan\dfrac{\pi}{4}}{1+\tan\alpha\tan\dfrac{\pi}{4}} \\ &= \frac{-\left(\dfrac{1}{2}\right)-1}{1+1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)} \\ &= -3\end{aligned}$$

なので

$$\color{red}{\tan\theta_p = 3}.$$

$$\begin{aligned}\tan\theta_Q &= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \\ &= \color{red}{1} \\ &= \tan\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan\theta_R &= -\tan(\pi-\theta_R) \\ &= -\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\tan\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right] \\ &= -\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \color{red}{2}.\end{aligned}$$



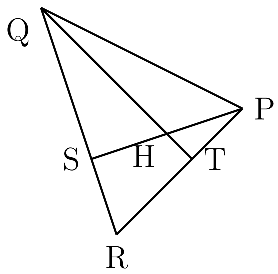

(2)　点 R から $l_2$ への垂線の足を U とする。
また点 H は定義から △PQR の垂心である。
よって、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{SQ}} &= \frac{\frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{PS}}}{\frac{\mathrm{SQ}}{\mathrm{PS}}} \\ &= \frac{\frac{1}{\tan\theta_{\mathrm{R}}}}{\frac{1}{\tan\theta_{\mathrm{Q}}}} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

同様の考えで

$$\frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{TP}} = \frac{3}{2}.$$

を得る。




(3)　△ABC と直線 PS に対し、メネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{SQ}}\times\frac{\mathrm{PT}}{\mathrm{RP}}\times\frac{\mathrm{HQ}}{\mathrm{TH}}=1$$

つまり

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{\mathrm{HQ}}{\mathrm{TH}}=1$$

すなわち

$$\frac{\mathrm{HQ}}{\mathrm{TH}}=5$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{RH}}&=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{RT}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\\&=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{RP}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{RP}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{RQ}}.\end{aligned}$$

5.

(1)　任意の $x$ に対し

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

である。

$f(-1) = f'(-1) = 0$ なので

$$-a + b - c + d = 0 \text{ かつ } 3a - 2b + c = 0$$

つまり

$$b = 2a + d \text{ かつ } c = a + 2d$$

よって、$f(x) = ax^3 + (2a+d)x^2 + (a+2d)x + d = a(x+1)^2(x+d)$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{x^2 + 2x + 1} &= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)^2(ax+d)}{(x+1)^2} \\ &= \lim_{x \to -1} (ax + d) \\ &= -a + d. \end{aligned}$$

$\dfrac{f(x)}{x^2 + 2x + 1} \to 3 \quad (x \to -1)$ なので

$$-a + d = 3$$

つまり

$$d = a + 3.$$

これを $b = 2a + d$ と $c = a + 2d$ に代入すると

$$b = 3a + 3, c = 3a + 6.$$

(2)　(1) から 任意の $x$ に対し

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2 + 2(3a+3)x + 3a + 6 \\ &= 3a(x+1)\left(x + 1 + \frac{2}{a}\right) \end{aligned}$$

である。

$a > 0$ なので、$f(x)$ の増減表は次のようになる。

| $x$ | $(-\infty)$ | $\cdots$ | $-1-\frac{2}{a}$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $(\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $(-\infty)$ | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $(\infty)$ |

よって

$$f\left(-1-\frac{2}{a}\right)=36$$

が求める $a$ の条件である。

ここで、(1) から

$$f(x)=ax^3+(3a+3)x^2+(3a+6)x+a+3=(x+1)^2(ax+a+3)$$

だから

$$\left\{\left(-1-\frac{2}{a}\right)+1\right\}^2\left\{a\left(-1-\frac{2}{a}\right)+a+3\right\}=36.$$

つまり

$$a=\frac{1}{3}\quad(\because a>0).$$

(3)　$a=\dfrac{1}{3}$ なので $f(x)=\dfrac{1}{3}(x+1)^2(x+10)$ である。

$$f(x)=36$$

となるのは

$$\frac{1}{3}(x+1)^2(x+10)=36.$$

つまり

$$(x-7)^2(x+2)=0$$

なので、これを解くと

$$x=-7,2$$

改めて $f(x)$ の増減表を書き直すと

| $x$ | $(-\infty)$ | $\cdots$ | $-7$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $2$ | $(\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $f(x)$ | $(-\infty)$ | $\nearrow$ | $36$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $36$ | $(\infty)$ |

よって、増減表から、求める $t$ の条件は

$$t\leqq -7\leqq t+1 \text{ または、} t+1=2$$

だとわかる。

つまり

$$-8\leqq t\leqq -7 \text{ または、} t=1.$$